Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Daniel Plaumann
Wintersemester 2012/2013

TORISCHE VARIETÄTEN

5. Übungsblatt
Besprechung am 6. Dezember

Seien immer $N \subset N_{\mathbb{R}}$ und $M \subset M_{\mathbb{R}}$ duale Gitter.

12. Es sei $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ ein spitzer rationaler polyedrischer Kegel. Zeige: Genau dann hat die affine torische Varietät U_σ einen Fixpunkt unter der Toruswirkung, wenn $\dim \sigma = \dim N_{\mathbb{R}}$ gilt. Dann ist der Fixpunkt eindeutig und entspricht dem maximalen Ideal

$$\langle \chi^m \mid m \in S_\sigma \smallsetminus \{0\} \rangle \subset \mathbb{C}[S_\sigma].$$

13. Es sei $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subset M$, $S = \mathbb{N}\mathcal{A}$ und $Y_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{C}^s$ die zugehörige affine torische Varietät. Sei $\gamma \colon S \to \mathbb{C}$ ein Halbgruppenhomomorphismus und $p = (\gamma(m_1), \dots, \gamma(m_s))$.

(a) Zeige, dass das maximale Ideal

$$\{ f \in \mathbb{C}[S] \mid f(p) = 0 \}$$

genau der Kern des durch γ induzierten Homomorphismus $\mathbb{C}[S] \to \mathbb{C}$ ist.

(b) Es sei $t \in T_N \subset (\mathbb{C}^*)^s$. Verifiziere, dass der Halbgruppenhomomorphismus $\gamma_{t\cdot p} \colon m \mapsto \chi^m(t)\gamma(m)$ genau dem Punkt

$$\big(\chi^{m_1}(t)\gamma(m_1), \dots, \chi^{m_s}(t)\gamma(m_s)\big) \in \mathbb{C}^s$$

entspricht.

14. Es sei $\mathcal{A} \subset M$ endlich. Genau dann ist die Halbgruppe $\mathbb{N}\mathcal{A}$ saturiert in M, wenn $\mathbb{N}\mathcal{A} = \operatorname{Cone}(\mathcal{A}) \cap M$ gilt.