Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Daniel Plaumann
Wintersemester 2012/2013

TORISCHE VARIETÄTEN

6. Übungsblatt
Besprechung am 20. Dezember

15. Es sei $\mathcal{A} = \{e_1, e_2, e_1 + 2e_2, 2e_1 + e_2\} \subset \mathbb{Z}^2$. Zeige, dass

$$\mathbb{Z}'\mathcal{A} = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a + b \equiv 0 \bmod 2\}$$

gilt und damit $\mathbb{Z}'\mathcal{A}$ vom Index 2 in $\mathbb{Z}\mathcal{A} = \mathbb{Z}^2$ ist. Folgere $Y_{\mathcal{A}} \neq \widehat{X}_{\mathcal{A}}$ und überprüfe auch direkt, dass das Verschwindungsideal $\mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}})$ nicht homogen ist.

16. Es sei $M = \mathbb{Z}^{3\times 3}$ das Gitter der ganzzahligen 3×3-Matrizen und sei $\mathcal{P}_3$ die Menge der Permutationsmatrizen in M. Wähle die Koordinaten

$$\begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ t_4 & t_5 & t_6 \\ t_7 & t_8 & t_9 \end{bmatrix}$$

auf den 3×3-Matrizen, so dass $\mathbb{C}[M] = \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_9^{\pm 1}]$. Auf $\mathbb{P}^5$ wähle homogene Koordinaten x_{ijk} indiziert durch die Permutationen $\sigma_{ijk}\colon [(1,2,3) \mapsto (i,j,k)] \in S_3$.

(a) Zeige, dass $x_{123}x_{231}x_{312} - x_{132}x_{321}x_{213} \in \mathbf{I}(X_{\mathcal{P}_3})$.
(b) Bestimme $\mathbb{Z}'\mathcal{P}_3$ und zeige $\dim X_{\mathcal{P}_3} = 4$.
(c) Folgere $\mathbf{I}(X_{\mathcal{P}_3}) = \langle x_{123}x_{231}x_{312} - x_{132}x_{321}x_{213}\rangle$.

17. Es sei $P = \mathrm{conv}(0, e_1, e_2, e_1 + e_2 + 3e_3) \subset \mathbb{R}^3$, ein dreidimensionales Simplex. Bestimme die Facettendarstellung von P, die Gitterpunkte in P und die projektive torische Varietät $X_{P\cap\mathbb{Z}^3}$.