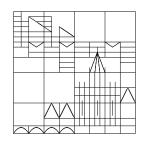
Universität Konstanz Fachbereich Mathematik und Statistik Daniel Plaumann Wintersemester 2012/2013



## TORISCHE VARIETÄTEN

6. Übungsblatt Besprechung am 20. Dezember

**15.** Es sei 
$$A = \{e_1, e_2, e_1 + 2e_2, 2e_1 + e_2\} \subset \mathbb{Z}^2$$
. Zeige, dass

$$\mathbb{Z}'\mathcal{A} = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a+b \equiv 0 \bmod 2\}$$

gilt und damit  $\mathbb{Z}'\mathcal{A}$  vom Index 2 in  $\mathbb{Z}\mathcal{A} = \mathbb{Z}^2$  ist. Folgere  $Y_{\mathcal{A}} \neq \widehat{X}_{\mathcal{A}}$  und überprüfe auch direkt, dass das Verschwindungsideal  $\mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}})$  nicht homogen ist.

16. Es sei  $M = \mathbb{Z}^{3\times 3}$  das Gitter der ganzzahligen  $3\times 3$ -Matrizen und sei  $\mathcal{P}_3$  die Menge der Permutationsmatrizen in M. Wähle die Koordinaten

$$\begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ t_4 & t_5 & t_6 \\ t_7 & t_8 & t_9 \end{bmatrix}$$

auf den  $3 \times 3$ -Matrizen, so dass  $\mathbb{C}[M] = \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_9^{\pm 1}]$ . Auf  $\mathbb{P}^5$  wähle homogene Koordinaten  $x_{ijk}$  indiziert durch die Permutationen  $\sigma_{ijk}$ :  $[(1, 2, 3) \mapsto (i, j, k)] \in S_3$ .

- (a) Zeige, dass  $x_{123}x_{231}x_{312} x_{132}x_{321}x_{213} \in \mathbf{I}(X_{\mathcal{P}_3})$ .
- (b) Bestimme  $\mathbb{Z}'\mathcal{P}_3$  und zeige dim  $X_{\mathcal{P}_3} = 4$ .
- (c) Folgere  $I(X_{\mathcal{P}_3}) = \langle x_{123}x_{231}x_{312} x_{132}x_{321}x_{213} \rangle$ .
- 17. Es sei  $P = \text{conv}(0, e_1, e_2, e_1 + e_2 + 3e_3) \subset \mathbb{R}^3$ , ein dreidimensionales Simplex. Bestimme die Facettendarstellung von P, die Gitterpunkte in P und die projektive torische Varietät  $X_{P \cap \mathbb{Z}^3}$ .