

1. AFFINE TORISCHE VARIETÄTEN

Literatur

zu torischen Varietäten

- [CLS] Cox, Little, Schenck: *Toric Varieties* (AMS Graduate Studies 124)
- Fulton: *Introduction to Toric Varieties*
- Oda: *Convex bodies and algebraic geometry*

Für einige Grundlagen über Tori verweisen wir auf

- [Hu] Humphreys: *Linear Algebraic Groups*. (Springer GTM 21)

Dieses Skript folgt [CLS] sehr nahe. Auch die Numerierung ist an [CLS] angepasst.

1.0. Affine Varietäten

Algebra	Geometrie
$h_1, \dots, h_k \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$	$V = \{p \in \mathbb{C}^n \mid h_1(p) = \dots = h_k(p) = 0\}$ (affine Varietät)
$I = (h_1, \dots, h_k) = \{\sum g_i h_i \mid g_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]\}$ (Ideal)	$V = \mathbf{V}(I) = \{p \in \mathbb{C}^n \mid \forall h \in I: h(p) = 0\}$
$\mathbf{I}(X) = \{h \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \mid \forall p \in X: h(p) = 0\}$	$X \subset \mathbb{C}^n$

Nullstellensatz

$$\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = \sqrt{I}$$

(wobei $\sqrt{I} = \{h \mid \exists r > 0: h^r \in I\}$)

$\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/\mathbf{I}(V)$	$V \cong \text{Spec}(\mathbb{C}[V]) = \text{Hom}(\mathbb{C}[V], \mathbb{C})$ $V \ni p \mapsto \begin{cases} \mathbb{C}[V] & \rightarrow \mathbb{C} \\ f & \mapsto f(p) \end{cases}$ (affine Varietät, koordinatenfrei)
$\mathbb{C}[V]$ nullteilerfrei ($\Leftrightarrow \mathbf{I}(V)$ prim)	V irreduzibel
$\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}$ ($\Leftrightarrow \mathbf{I}(V)$ maximal)	$V = \{p\}$ ein Punkt
$\mathbb{C}[V]$ ganz abgeschlossen	V normal
$\mathbb{C}[V]$ Dedekindring	V glatte Kurve
\vdots	\vdots

Die Zariski-Topologie.

Es sei V eine affine Varietät.

- **Abgeschlossen** in V sind die Mengen der Form $\mathbf{V}(f_1, \dots, f_k) = \{p \in V \mid f_1(p) = \dots = f_k(p) = 0\}$ mit $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{C}[V]$.
- **Offen** sind die Komplemente, also die Mengen $\{p \in V \mid \exists i: f_i(p) \neq 0, \}$.
- **Basisch offen** heißen die offenen Mengen mit nur einer Ungleichung:
Für $f \in \mathbb{C}[V]$, schreibe

$$V_f = \{p \in V \mid f(p) \neq 0\}.$$

Die Menge V_f ist selbst eine affine Varietät mit

$$\mathbb{C}[V_f] = \mathbb{C}[V]_f := \mathbb{C}[V][f^{-1}] := \mathbb{C}[V][y]/(fy - 1).$$

Grund: Die affine Varietät $W = \{(p, t) \in V \times \mathbb{C} \mid f(p) \cdot t = 1\} \subset V \times \mathbb{C}$ ist durch das von $fy - 1 \in \mathbb{C}[V][y]$ erzeugte Ideal gegeben. Es gilt also $\mathbb{C}[W] = \mathbb{C}[V][y]/(fy - 1)$. Nun ist $W \rightarrow V_f, (p, t) \mapsto p$ eine Bijektion, die V_f zu einer affinen Varietät macht. Das heißt, Funktionen auf V_f haben die Form $\frac{g}{f^a}$ mit $a \in \mathbb{Z}$. Es sind also rationale Funktionen, die Pole nur in $\mathbf{V}(f)$ haben dürfen. (Genauerer Zugang: Strukturgarbe — später)

Beispiel. Für $V = \mathbb{C}, f = x$ erhält man $V_x = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{C}[V_x] = \mathbb{C}[x, x^{-1}] \cong \mathbb{C}[x, y]/(xy - 1)$. (Bild!)

Seien V, W affine Varietäten. Zwei Definitionen von **Morphismus** zwischen V und W :

- **Konkret.** Sind V, W eingebettet, etwa $V \subset \mathbb{C}^n$ und $W \subset \mathbb{C}^m$, dann ist ein Morphismus $\varphi: V \rightarrow W$ gegeben durch die Einschränkung $\varphi = \Phi|_V$ einer polynomialen Abbildung $\Phi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ mit $\Phi = (h_1, \dots, h_m), h_1, \dots, h_m \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, mit der Eigenschaft $\Phi(V) \subset W$.
Solches φ induziert eine Abbildung

$$\varphi^*: \begin{cases} \mathbb{C}[W] & \rightarrow & \mathbb{C}[V] \\ f & \mapsto & f \circ \varphi \end{cases}$$

zwischen den Koordinatenringen „durch Zurückziehen“. Die Abbildung φ^* ist ein Homomorphismus von \mathbb{C} -Algebren, also \mathbb{C} -linear und multiplikativ.

- **Abstrakt.** Gegeben *irgendeinen* Algebren-Homomorphismus $\varphi^*: \mathbb{C}[W] \rightarrow \mathbb{C}[V]$.
Dann erhält man einen Morphismus zwischen den abstrakten Varietäten durch

$$\varphi: \begin{cases} V = \text{Hom}(\mathbb{C}[V], \mathbb{C}) & \rightarrow & \text{Hom}(\mathbb{C}[W], \mathbb{C}) = W \\ \alpha & \mapsto & \alpha \circ \varphi^* \end{cases}$$

Die Korrespondenz von V mit $\mathbb{C}[V]$ bzw. von $\varphi: V \rightarrow W$ mit $\varphi^*: \mathbb{C}[W] \rightarrow \mathbb{C}[V]$ ist eine (Anti-)Äquivalenz (von Kategorien). Insbesondere sind V und W genau dann isomorph als Varietäten, wenn $\mathbb{C}[V]$ und $\mathbb{C}[W]$ als \mathbb{C} -Algebren isomorph sind.

1.1. Einführung in affine torische Varietäten

Der **Standardtorus**

$$T = (\mathbb{C}^*)^n = \{p \in \mathbb{C}^n \mid p_1 \cdots p_n \neq 0\}$$

ist eine

- **affine Varietät** mit Koordinatenring

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[T] &= \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_{x_1 \cdots x_n} \\ &= \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}]. \end{aligned}$$

Elemente von $\mathbb{C}[T]$ sind von der Form $\sum_{a \in \mathbb{Z}^n} c_a x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ (nur endlich viele $c_a \neq 0$) und heißen **Laurent-Polynome**.

- **algebraische Gruppe** mit der komponentenweisen Multiplikation

$$(p_1, \dots, p_n) \cdot (q_1, \dots, q_n) = (p_1 q_1, \dots, p_n q_n).$$

Allgemein ist eine **affine algebraische Gruppe** eine Gruppe G die auch eine affine Varietät ist derart, dass Multiplikation $G \times G \rightarrow G$ und Invertieren $G \rightarrow G$ Morphismen sind.

Beispiel. Bevor wir jetzt einiges über Tori zeigen: Was ist nun eine torische Varietät? Zur Motivation ein informelles Beispiel: Zeichnet man die Laurent-Monome $x^i y^j$ in zwei Variablen als Gitterpunkte (i, j) in der Ebene, dann entspricht der Polynomring $\mathbb{C}[x, y]$ den Punkten im positiven Quadranten (Bild!). Dabei entsprechen $(1, 0)$ und $(0, 1)$ den beiden Erzeugern von $\mathbb{C}[x, y]$ und erzeugen ihrerseits auch alle Gitterpunkte durch Addition.

Betrachte nun etwa den konvexen Kegel, der von $(1, 0)$ und $(1, 2)$ aufgespannt wird (Bild!). Gitterpunkte in diesem Kegel werden nicht nur von $(1, 0)$ und $(1, 2)$ erzeugt, sondern zusätzlich braucht man noch $(1, 1)$. Das entspricht dem Ring

$$\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[x, xy, xy^2] \cong \mathbb{C}[u, v, w]/(v^2 - uw).$$

Die zugehörige torische Varietät V lebt in \mathbb{C}^3 und ist durch die Gleichung $v^2 = uw$ beschrieben. (Das reelle Bild ist ein Kegel).

Definition. Ein n -dimensionaler **Torus** ist eine algebraische Gruppe, die zu $(\mathbb{C}^*)^n$ isomorph ist.

Ein Beispiel ist, wie gesehen, die ebene Parabel $xy = 1$ mit Multiplikation $(s, t)(s', t') = (ss', tt')$.

Definition. Sei T ein Torus. Ein **Charakter** von T ist ein algebraischer Gruppenhomomorphismus

$$\chi: T \rightarrow \mathbb{C}^*.$$

Eine **Einparametergruppe** von T ist ein algebraischer Gruppenhomomorphismus

$$\lambda: \mathbb{C}^* \rightarrow T.$$

Die Charaktere von T bilden eine Gruppe M_T durch $(\chi\chi')(t) = \chi(t) \cdot \chi'(t)$. Ebenso bilden die Einparametergruppen eine Gruppe N_T .

Für jedes $m = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ ist

$$\chi^m: \begin{cases} (\mathbb{C}^*)^n & \rightarrow \mathbb{C}^* \\ (t_1, \dots, t_n) & \mapsto t_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n} \end{cases}$$

ein Charakter von $(\mathbb{C}^*)^n$.

Für jedes $u = (b_1, \dots, b_n)$ ist

$$\lambda^u: \begin{cases} \mathbb{C}^* & \rightarrow (\mathbb{C}^*)^n \\ t & \mapsto (t^{b_1}, \dots, t^{b_n}) \end{cases}$$

eine Einparametergruppe.

Es gelten $\chi^m \cdot \chi^{m'} = \chi^{m+m'}$ und $\lambda^u \lambda^{u'} = \lambda^{u+u'}$.

Lemma. Die Abbildungen

$$\begin{cases} \mathbb{Z}^n & \rightarrow M_{(\mathbb{C}^*)^n} \\ m & \mapsto \chi^m \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \mathbb{Z}^n & \rightarrow N_{(\mathbb{C}^*)^n} \\ u & \mapsto \lambda^u \end{cases}$$

sind Isomorphismen von Gruppen.

Beweis. Sei $T = (\mathbb{C}^*)^n$. Injektivität von $m \mapsto \chi^m$ ist offensichtlich. Zur Surjektivität: Sei $n = 1$ und sei $\chi \in M_{(\mathbb{C}^*)^n}$. Dann ist $\chi: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ ein Morphismus, also $\chi \in \mathbb{C}[T] = \mathbb{C}[x]_x$, etwa $\chi = \frac{f}{x^a}$ für $f \in \mathbb{C}[x]$ und $a \in \mathbb{Z}$. Da χ nach \mathbb{C}^* abbildet, hat f keine Nullstelle außer 0, also gilt $f = \alpha x^b$ für ein $\alpha \in \mathbb{C}$ und $b \in \mathbb{N}$. Wegen $\chi(1) = 1$ ist $\alpha = 1$ und damit $\chi(t) = t^{b-a}$.

Ist n beliebig, so schreibe $\chi(t_1, \dots, t_n) = \chi(t_1, 1, \dots, 1) \cdots \chi(1, \dots, 1, t_n) = t_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n}$.

Für $u \mapsto \lambda^u$ geht der Beweis für $n = 1$ genauso. Für beliebiges n benutze entsprechend $\lambda(t) = (\lambda_1(t), 1, \dots, 1) \cdots (1, \dots, 1, \lambda_n(t))$ für $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in N_{(\mathbb{C}^*)^n}$. \square

Notation. Die Gruppenstruktur auf \mathbb{Z}^n ist additiv. Deshalb schreiben wir die Gruppenstruktur auf M_T ebenfalls additiv, etwa $m + m'$ für $m, m' \in M_T$. Wenn wir den entsprechenden Charakter als Abbildung brauchen und zur multiplikativen Schreibweise wechseln wollen, schreiben wir χ^m für $m \in M$ (nicht nur für $m \in \mathbb{Z}^n$!). Entsprechendes für N_T , also etwa λ^u für $u \in N_T$.

Definition. Eine freie abelsche Gruppe von endlichem Rang wird **Gitter** genannt. Eine **Gitterbasis** eines Gitter M ist eine Teilmenge $\{m_1, \dots, m_n\} \subset M$ die durch $m_i \mapsto e_i$ einen Gruppenisomorphismus $M \cong \mathbb{Z}^n$ stiftet.

Zu einem Torus T gehören also zwei Gitter, das **Charaktergitter** $M = M_T$ und das **Einparametergitter** $N = N_T$. Zwischen M und N gibt es eine natürliche bilineare Paarung $\langle -, - \rangle: M \times N \rightarrow \mathbb{Z}$ bestimmt durch die Eigenschaft

$$(\chi^m \circ \lambda^u)(t) = t^{\langle m, u \rangle} \quad \text{für } t \in \mathbb{C}^*.$$

Fixiert man einen Isomorphismus $T \cong (\mathbb{C}^*)^n$ und die entsprechenden Isomorphismen $M \cong \mathbb{Z}^n$ und $N \cong \mathbb{Z}^n$ aus dem Lemma, so bekommt man einfach die kanonische Paarung

$$\langle m, u \rangle = \sum_{i=1}^n m_i u_i$$

für $m, u \in \mathbb{Z}^n$ (Check!). Insbesondere ist die Paarung nicht-ausgeartet.

Über die obigen Isomorphismen induzieren Morphismen zwischen Tori und Gittern entsprechende Morphismen auf den anderen Objekten. Insbesondere: Ist $\Phi: T_1 \rightarrow T_2$ ein algebraischer Gruppenhomomorphismus, so ist ein Homomorphismus $\widehat{\Phi}: M_{T_1} \rightarrow M_{T_2}$ zwischen den Charaktergittern durch $\chi \mapsto \chi \circ \varphi$ gegeben. Der so definierte (contravariante) Funktor zwischen Tori und Gittern ist exakt. Das bedeutet insbesondere: Ist Φ injektiv, so ist $\widehat{\Phi}$ surjektiv. Ist Φ surjektiv, so ist $\widehat{\Phi}$ injektiv¹.

Man hat **kanonische Isomorphismen**

- $M \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$, durch $m \mapsto [u \mapsto \langle m, u \rangle]$.
- $N \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$, durch $u \mapsto [m \mapsto \langle u, m \rangle]$.
- $T \cong N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$, durch $u \otimes t \mapsto \lambda^u(t)$.

Fixiert man Basen auf einem der drei (also einen Isomorphismus $T \cong (\mathbb{C}^*)^n$ oder $M \cong \mathbb{Z}^n$ oder $N \cong \mathbb{Z}^n$), so bestimmt das über die obigen Isomorphismen auch Basen auf den anderen beiden. (Das ist im Prinzip die Bedeutung des Worts „kanonisch“).

Moral. Jedes der drei Objekte T, M, N legt die anderen beiden fest.

Notation. Wir hängen den Torus an das Einparametergitter, indem wir etwa sagen: „Sei T_N ein Torus mit Charaktergitter M^c . Technisch ist dann gemeint, dass N ein Gitter ist, $T_N = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$ und $M = \text{Hom}(N, \mathbb{Z})$. Praktisch ist nur gemeint, dass wir auf T_N, N und M ggf. kompatible Basen wählen.

Definition. Es sei V eine algebraische Varietät und G eine algebraische Gruppe. Eine **algebraische Gruppenoperation** ist ein Morphismus

$$G \times V \rightarrow V, \quad (g, p) \mapsto g \cdot p$$

mit $(gh) \cdot p = g \cdot (h \cdot p)$ und $1 \cdot p = p$ für alle $g, h \in G$ und $p \in V$.

Beispiel. Der Torus $(\mathbb{C}^*)^n$ operiert auf \mathbb{C}^n durch komponentenweise Multiplikation.

Definition 1.1.3. Eine **affine torische Varietät** ist eine irreduzible affine Varietät V , die einen Torus T_N als Zariski-offene Teilmenge enthält, derart, dass folgendes gilt: Die Operation von T_N auf sich setzt sich fort zu einer algebraischen Operation

$$T_N \times V \rightarrow V.$$

Beispiel. $(\mathbb{C}^*)^n \subset \mathbb{C}^n$ ist eine affine torische Varietät.

Beispiel 1.1.4. $V = \mathbf{V}(x^3 - y^2) \subset \mathbb{C}^2$ ist eine torische Varietät mit Torus

$$T_N = V \cap (\mathbb{C}^*)^2 = \{(t^2, t^3) \mid t \in \mathbb{C}^*\} \cong \mathbb{C}^*.$$

Beispiel 1.1.5. $V = \mathbf{V}(xy - zw) \subset \mathbb{C}^4$ ist eine torische Varietät mit Torus

$$V \cap (\mathbb{C}^*)^4 = \{(t_1, t_2, t_3, t_1 t_2 t_3^{-1}) \mid t_i \in \mathbb{C}^*\} \cong (\mathbb{C}^*)^3.$$

¹Die erste Aussage ist nicht trivial. Sei $T_1 \subset T_2$ eine Inklusion von Tori. Zunächst zeigt man, dass T_1 dann abgeschlossen in T_2 sein muss. Man hat also eine surjektive Einschränkungabbildung $\mathbb{C}[T_2] \rightarrow \mathbb{C}[T_1]$. Ist nun $\chi: T_1 \rightarrow \mathbb{C}^*$ ein Charakter, so schreibe $\chi = \sum_{i=1}^k c_i \chi_i|_{T_1}$ für irgendwelche Charaktere χ_i von T_2 . Wegen der linearen Unabhängigkeit der Charaktere auf T_1 muss es dann ein i mit $\chi_i|_{T_1} = \chi$ geben.

Diskutieren nun **drei Konstruktionsmethoden** für torische Varietäten.

Gitterpunkte. Sei T_N ein Torus mit Charaktergitter M und sei $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subset M$ eine endliche Teilmenge. Definiere einen Morphismus

$$\Phi_{\mathcal{A}}: \begin{cases} T_N & \rightarrow & (\mathbb{C}^*)^s \\ t & \mapsto & (\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_s}(t)) \end{cases} .$$

Wir schreiben $Y_{\mathcal{A}}$ für den Zariski-Abschluss des Bildes $\Phi_{\mathcal{A}}(T_N)$ in \mathbb{C}^s .

Proposition 1.1.8. *Es sei $\mathcal{A} \subset M$ endliche Menge und $\mathbb{Z}\mathcal{A} \subset M$ das von \mathcal{A} erzeugte Teilgitter. Dann ist $Y_{\mathcal{A}}$ eine affine torische Varietät mit Charaktergitter $\mathbb{Z}\mathcal{A}$. Insbesondere ist die Dimension von $Y_{\mathcal{A}}$ der Rang von $\mathbb{Z}\mathcal{A}$.*

Der Rang von $\mathbb{Z}\mathcal{A}$ ist der Rang als freie abelsche Gruppe. Konkret ist er aber auch der Rang der $s \times n$ -Matrix mit Zeilen m_1, \dots, m_s über \mathbb{Q} , wenn man eine Basis $M \cong \mathbb{Z}^n$ fixiert.

Beweis. Es sei $T = \Phi_{\mathcal{A}}(T_N)$. Zunächst muss man wissen, dass T als Bild eines Torus unter einem algebraischen Gruppenhomomorphismus wieder ein Torus ist und außerdem abgeschlossen in $(\mathbb{C}^*)^s$ (siehe [CLS, Prop. 1.1.1] und [Hu, §16]). Letzteres impliziert $Y_{\mathcal{A}} \cap (\mathbb{C}^*)^s = T$. Somit ist T offen in $Y_{\mathcal{A}}$. Außerdem ist T irreduzibel (als Bild einer irreduziblen Varietät) und damit auch $Y_{\mathcal{A}}$.

Der Torus T operiert auf \mathbb{C}^s über die Inklusion $T \subset (\mathbb{C}^*)^s$. Für alle $t \in T$ gilt

$$T = t \cdot T \subset t \cdot Y_{\mathcal{A}}.$$

Damit ist $t \cdot Y_{\mathcal{A}}$ eine abgeschlossene Menge, die T enthält. Es folgt $Y_{\mathcal{A}} \subset t \cdot Y_{\mathcal{A}}$, da $Y_{\mathcal{A}}$ der Abschluss von T ist. Dasselbe Argument mit t^{-1} anstelle von t zeigt $Y_{\mathcal{A}} = t Y_{\mathcal{A}}$. Damit operiert T wie gewünscht auf $Y_{\mathcal{A}}$, was zeigt, dass $Y_{\mathcal{A}}$ eine affine torische Varietät ist.

Sei nun M' das Charaktergitter von T . Betrachte das kommutierende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_N & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{A}}} & (\mathbb{C}^*)^s \\ & \searrow & \uparrow \\ & & T \end{array}$$

Dieses induziert durch Zurückziehen ein Diagramm auf den Charaktergittern

$$\begin{array}{ccc} M & \xleftarrow{\widehat{\Phi}_{\mathcal{A}}} & \mathbb{Z}^s \\ & \searrow & \downarrow \\ & & M' \end{array}$$

Dabei ist $\widehat{\Phi}_{\mathcal{A}}$ einfach gegeben durch $e_i \mapsto m_i$, $i = 1, \dots, s$. Das Bild von $\widehat{\Phi}_{\mathcal{A}}$ ist also genau $\mathbb{Z}\mathcal{A}$. Aus dem Diagramm ergibt sich also $M' \cong \mathbb{Z}\mathcal{A}$. \square

Torische Ideale. Sei $Y_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{C}^s$ wie oben. Wir bestimmen das Ideal von $Y_{\mathcal{A}}$ in $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]$. Sei L der Kern der Abbildung $\widehat{\Phi}_{\mathcal{A}}: \mathbb{Z}^s \rightarrow M$, $e_i \mapsto m_i$. Für jedes $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_s) \in L$, schreibe

$$\ell_+ = \sum_{i:\ell_i>0} \ell_i e_i \quad \text{und} \quad \ell_- = - \sum_{i:\ell_i<0} \ell_i e_i,$$

so dass $\ell = \ell_+ - \ell_-$ und $\ell_+, \ell_- \in \mathbb{N}^s$. Dann verschwindet das Binom

$$x^{\ell_+} - x^{\ell_-} = \prod_{\ell_i > 0} x_i^{\ell_i} - \prod_{\ell_i < 0} x_i^{-\ell_i}$$

auf dem Bild von $\Phi_{\mathcal{A}}$ (denn es gilt $\sum_{\ell_i > 0} \ell_i m_i = -\sum_{\ell_i < 0} \ell_i m_i$, also $\prod_{\ell_i > 0} \chi^{\ell_i m_i} = \prod_{\ell_i < 0} \chi^{-\ell_i m_i}$) und damit auch auf $Y_{\mathcal{A}}$.

Proposition 1.1.9. *Das Verschwindungsideal der torischen Varietät $Y_{\mathcal{A}}$ ist*

$$\mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}}) = \langle x^{\ell_+} - x^{\ell_-} \mid \ell \in L \rangle = \langle x^{\alpha} - x^{\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^s \text{ und } \alpha - \beta \in L \rangle.$$

Beweis. Zuerst überzeugt man sich, dass die beiden Ideale rechts gleich sind (Aufgabe 1). Sei I_L dieses Ideal. Wir haben bereits $I_L \subset \mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}})$ gesehen. Für die umgekehrte Inklusion fixieren wir einen Isomorphismus $T_N \cong (\mathbb{C}^*)^n$ und den entsprechenden Isomorphismus $M \cong \mathbb{Z}^n$. Die Abbildung $\Phi: (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{C}^s$ ist dann durch Laurent-Monome t^{m_i} in $t = (t_1, \dots, t_n)$ gegeben. Angenommen, $I_L \not\subset \mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}})$, dann wählen wir $f \in \mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}}) \setminus I_L$ mit minimalem Leitmonom $x^{\alpha} = \prod_{i=1}^s x_i^{a_i}$, $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$. (Das Leitmonom hängt von der Wahl einer Monomordnung ab. Wir fixieren einfach irgendeine, z.B. die lexikographische). Wir können durch Reskalieren annehmen, dass x^{α} in f den Koeffizient 1 hat.

Wegen $f \in \mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}})$ ist $f(t^{m_1}, \dots, t^{m_s})$ identisch Null, als Laurent-Polynom in t_1, \dots, t_n . Deshalb muss sich der Term, der von x^{α} kommt, mit irgendetwas wegheben. Also muss f ein Monom $x^{\beta} = \prod_{i=1}^s x_i^{b_i}$ mit $\beta < \alpha$ enthalten derart, dass $\prod_{i=1}^s (t^{m_i})^{a_i} = \prod_{i=1}^s (t^{m_i})^{b_i}$ gilt. Es muss also

$$\sum_{i=1}^s a_i m_i = \sum_{i=1}^s b_i m_i$$

gelten. Das bedeutet gerade $\alpha - \beta \in L$ und damit $x^{\alpha} - x^{\beta} \in I_L$. Dann ist $f - x^{\alpha} + x^{\beta}$ ein Element in $\mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}}) \setminus I_L$ und hat echt kleineren Leitterm als f , ein Widerspruch. \square

Definition 1.1.10.

- (a) Ein **Gitterideal** ist ein Ideal der Form $I_L = \langle x^{\alpha} - x^{\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^s \text{ und } \alpha - \beta \in L \rangle$, wobei $L \subset \mathbb{Z}^s$ ein Teilgitter (=Untergruppe) ist.
- (b) Ein **torisches Ideal** ist ein Gitterideal, das prim ist.

Ein **Binom** ist ein Ausdruck der Form $x^{\alpha} - x^{\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.

Lemma (CLS, Prop. 1.1.1 (b)). *Sei T ein Torus und $H \subset T$ eine irreduzible algebraische Untergruppe (d.h. Untergruppe und Untervarietät). Dann ist H ebenfalls ein Torus.* \square

Proposition 1.1.11.

- (a) Ein Ideal I von $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]$ ist genau dann torisch, wenn es prim ist und von Binomen erzeugt wird.
- (b) Die durch ein torisches Ideal definierte affine Varietät ist torisch.

Beweis. Ein torisches Ideal ist per Definition prim und von Binomen erzeugt. Sei umgekehrt I ein Primideal, erzeugt von Binomen $x^{\alpha_i} - x^{\beta_i}$. Beachte, dass dann $\mathbf{V}(I)$ nicht leer ist (denn es enthält $(1, \dots, 1)$) und dass $\mathbf{V}(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s$ eine Untergruppe von $(\mathbb{C}^*)^s$ ist (denn aus $p^{\alpha_i} = p^{\beta_i}$ und $q^{\alpha_i} = q^{\beta_i}$ folgt auch $(pq)^{\alpha_i} = (pq)^{\beta_i}$). Da $\mathbf{V}(I)$ irreduzibel ist, ist $\mathbf{V}(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s$

eine irreduzible Untervarietät von $(\mathbb{C}^*)^s$ und auch eine Untergruppe. Nach dem vorangehenden Lemma ist $T = \mathbf{V}(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s$ ein Torus.

Sei M das Charaktergitter von T . Die Inklusion $T \subset (\mathbb{C}^*)^s$ induziert eine Surjektion $\mathbb{Z}^s \rightarrow M$ von Charaktergittern. Sei $m_i \in M$ darunter das Bild von e_i . (D.h. also einfach, dass χ^{m_i} die Einschränkung der i -ten Projektion $(\mathbb{C}^*)^s \rightarrow \mathbb{C}^*$ auf T ist). Dann gilt $\mathbf{V}(I) = Y_{\mathcal{A}}$ für $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\}$. Denn per Definition ist $Y_{\mathcal{A}}$ einfach der Abschluss von T . Es gilt also $Y_{\mathcal{A}} \subset \mathbf{V}(I)$. Da $\mathbf{V}(I)$ irreduzibel von der gleichen Dimension ist, folgt $\mathbf{V}(I) = Y_{\mathcal{A}}$. Das zeigt (b). Nach dem Nullstellensatz gilt außerdem $I = \mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}})$, da I prim ist. Somit ist I nach Satz 1.1.9 torisch, was (a) beweist. \square

Es ist noch nicht klar, dass alle affinen torischen Varietäten von torischen Idealen kommen.

Affine Halbgruppen. Eine Halbgruppe ist eine Menge S zusammen mit einer assoziativen Verknüpfung mit einem neutralen Element. Ist S eine kommutative Halbgruppe mit Verknüpfung $+$ und neutralem Element 0 , so ist die von einer Teilmenge $\mathcal{A} \subset S$ erzeugte Unterhalbgruppe genau die Menge

$$\mathbb{N}\mathcal{A} = \left\{ \sum_{m \in \mathcal{A}} a_m m \mid a_m \in \mathbb{N} \text{ mit } a_m \neq 0 \text{ für höchstens endlich viele } m \in \mathcal{A} \right\}.$$

Definition. Eine Halbgruppe heißt **affin**, wenn sie kommutativ, endlich-erzeugt und zu einer Unterhalbgruppe eines Gitters isomorph ist.

Das einfachste Beispiel einer affinen Halbgruppe ist $\mathbb{N}^s \subset \mathbb{Z}^s$. Allgemeiner: Ist M ein Gitter und $\mathcal{A} \subset M$ endlich, dann ist $\mathbb{N}\mathcal{A}$ eine affine Halbgruppe. Bis auf Isomorphie sind alle affinen Halbgruppen (per Definition) von dieser Form.

Definition. Es sei S eine Halbgruppe. Die frei über S erzeugte \mathbb{C} -Algebra wird mit $\mathbb{C}[S]$ bezeichnet und heißt die **Halbgruppen-Algebra** von S .

Elemente von $\mathbb{C}[S]$ sind also endliche formale Summen $\sum_{m \in S} c_m y^m$ mit der Multiplikation gegeben durch $y^m y^{m'} = y^{m+m'}$. Im Fall einer affinen Halbgruppe S realisieren wir $\mathbb{C}[S]$ etwas konkreter: Sei T_N ein Torus mit Charaktergitter M und sei $S \subset M$. Dann ist

$$\mathbb{C}[S] = \left\{ \sum_{m \in S} c_m \chi^m \mid c_m \in \mathbb{C} \text{ und } c_m = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } m \right\}.$$

mit der Multiplikation

$$\chi^m \cdot \chi^{m'} = \chi^{m+m'}.$$

Beispiel 1.1.12. Zur affinen Halbgruppe $\mathbb{N}^n \subset \mathbb{Z}^n$ gehört der Polynomring

$$\mathbb{C}[\mathbb{N}^n] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n],$$

wobei $x_i = \chi^{e_i}$.

Beispiel 1.1.13. Ist e_1, \dots, e_n eine Basis des Gitters M , so wird M als Halbgruppe von $\mathcal{A} = \{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$ erzeugt. Mit $t_i = \chi^{e_i}$ ist $\mathbb{C}[M]$ der Ring der Laurent-Polynome

$$\mathbb{C}[M] = \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}].$$

Allgemein ist $\mathbb{C}[M] = \mathbb{C}[T_N]$, wenn M das Charaktergitter des Torus T_N ist.

Proposition 1.1.14. *Es sei $S \subset M$ eine affine Halbgruppe.*

(a) $\mathbb{C}[S]$ ist ein Integritätsbereich.

(b) Ist $S = \mathbb{N}\mathcal{A}$ für eine endliche Teilmenge $\mathcal{A} \subset M$, so gilt $\text{Spec}(\mathbb{C}[S]) \cong Y_{\mathcal{A}}$. Insbesondere ist $\text{Spec}(\mathbb{C}[S])$ eine affine torische Varietät mit Charaktergitter $\mathbb{Z}S$.

Beweis. (a) Das folgt sofort aus $\mathbb{C}[S] \subset \mathbb{C}[M]$.

(b) Sei $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\}$ und sei $\pi = (\Phi_{\mathcal{A}})^*$ mit

$$\Phi_{\mathcal{A}}: \begin{cases} T_N & \rightarrow & \mathbb{C}^s \\ t & \mapsto & (\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_s}(t)) \end{cases}$$

wie zuvor. Explizit gilt

$$\pi: \begin{cases} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] & \rightarrow & \mathbb{C}[M] \\ x_i & \mapsto & \chi^{m_i} \end{cases}.$$

Das Bild von π ist genau $\mathbb{C}[S]$ und es gilt $\mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}}) = \mathbf{I}(\Phi_{\mathcal{A}}(T_N)) = \ker(\pi)$. Es folgt $\mathbb{C}[Y_{\mathcal{A}}] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/\mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}}) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/\ker(\pi) \cong \text{im}(\pi) = \mathbb{C}[S]$. Das zeigt die behauptete Isomorphie. Nach Prop. 1.1.8 hat $Y_{\mathcal{A}}$ das Charaktergitter $\mathbb{Z}\mathcal{A} = \mathbb{Z}S$. \square

Die Aussage (a) scheint trivial und ist für affine Halbgruppen ja tatsächlich leicht zu sehen. Andererseits ist es im allgemeinen nicht bekannt, ob die Gruppenalgebra einer torsionsfreien (nicht notwendig abelschen) Gruppe nullteilerfrei ist. Dass das so sein sollte, ist die Kaplansky-Vermutung, die für viele Klassen von Gruppen bekannt, im allgemeinen Fall aber unbewiesen ist.

Beispiel 1.1.15. Betrachte die von 2 und 3 in \mathbb{Z} erzeugte Halbgruppe $S = \{0, 2, 3, 4, \dots\}$. Für $\mathcal{A} = (2, 3)$ ist dann $\Phi_{\mathcal{A}}(t) = (t^2, t^3)$ und die torische Varietät ist durch das Ideal $\mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}}) = \langle x^3 - y^2 \rangle$ gegeben. Es ist also

$$\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[t^2, t^3] \cong \mathbb{C}[x, y]/(x^3 - y^2)$$

und die Varietät $Y_{\mathcal{A}}$ ist die Kurve $x^3 = y^2$, wie in Beispiel 1.1.4.

Äquivalenz der Konstruktionen. Brauchen zunächst noch etwas Vorbereitung. Sei G eine affine algebraische Gruppe und V eine affine Varietät. Eine Operation $(g, p) \mapsto g \cdot p$ von G auf V induziert eine Operation von G auf dem Koordinatenring $\mathbb{C}[V]$, geschrieben $(g, f) \mapsto g \cdot f$ durch $(g \cdot f)(p) = f(g^{-1} \cdot p)$ für $p \in V$. Ein linearer Unterraum $A \subset \mathbb{C}[V]$ heißt G -invariant, wenn $g \cdot f \in A$ für alle $f \in A$ und $g \in G$ gilt.

Sei T_N ein Torus mit Charaktergitter M . Wir betrachten zunächst die Operation von T_N auf $\mathbb{C}[T_N] = \mathbb{C}[M]$. Für $t, p \in T_N$ und $m \in M$ ist diese gegeben durch $(t \cdot \chi^m)(p) = \chi^m(t^{-1}p) = \chi^m(t^{-1})\chi^m(p)$. Es gilt also $t \cdot \chi^m = \chi^m(t^{-1})\chi^m$. Das heißt also, die Charaktere sind simultane Eigenvektoren der Operation von T_N . Umgekehrt ist jeder simultane Eigenvektor ein Charakter (Check!).

Lemma 1.1.16. *Sei $A \subset \mathbb{C}[M]$ ein T_N -invarianter Unterraum. Dann gilt*

$$A = \bigoplus_{\chi^m \in A} \mathbb{C} \cdot \chi^m.$$

Lemma. *Es sei T_N ein Torus, der linear auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum W operiert. Dann sind die Abbildungen $w \mapsto t \cdot w$ für alle $t \in T_N$ simultan diagonalisierbar.*

Beweis. Siehe [CLS, §1.1] und [Hu, §16]. □

Beweis von 1.1.16. Schreibe $A' = \bigoplus_{\chi^m \in A} \mathbb{C} \cdot \chi^m$ und bemerke zunächst, dass $A' \subset A$ gilt. Für die umgekehrte Inklusion, sei $f \neq 0$ in A und schreibe

$$f = \sum_{m \in \mathcal{B}} c_m \chi^m,$$

wobei $\mathcal{B} \subset M$ eine endliche Teilmenge ist. Setze

$$B = \text{span}(\chi^m \mid m \in \mathcal{B}) \subset \mathbb{C}[M].$$

Wegen $t \cdot \chi^m = \chi^m(t^{-1})\chi^m$ ist B offenbar T_N -invariant. Damit ist auch $A \cap B$ invariant unter T_N und enthält außerdem f . Nach dem vorangehenden Lemma ist die Operation von T_N auf dem endlich-dimensionalen Raum $A \cap B$ simultan diagonalisierbar. Mit anderen Worten, $A \cap B$ wird von simultanen Eigenvektoren aufgespannt. Das sind genau die Charaktere. Es folgt $\chi^m \in A$ für $m \in \mathcal{B}$ und damit $f \in A'$, wie gewünscht. □

Nun das Hauptergebnis für diesen Abschnitt.

Satz 1.1.17. *Es sei V eine affine Varietät. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- (a) *V ist eine affine torische Varietät.*
- (b) *$V \cong Y_A$ für eine endliche Teilmenge A eines Gitters.*
- (c) *V ist isomorph zu einer affinen Varietät, die durch ein torisches Ideal definiert ist.*
- (d) *$V \cong \text{Spec}(\mathbb{C}[S])$ für eine affine Halbgruppe S .*

Beweis. Wir kennen schon folgende Implikationen: (b) \Rightarrow (a) nach Prop. 1.1.8, (b) \Rightarrow (c) nach Prop. 1.1.9, (c) \Rightarrow (b) nach Prop. 1.1.11 und (d) \Rightarrow (b) nach Prop. 1.1.14.

Beweisen jetzt (a) \Rightarrow (d). Sei V eine torische Varietät mit Torus T_N und Charaktergitter M . Wegen $\mathbb{C}[T_N] = \mathbb{C}[M]$ induziert die Inklusion $T_N \subset V$ einen Homomorphismus

$$\mathbb{C}[V] \rightarrow \mathbb{C}[M]$$

zwischen den Koordinatenringen. Dieser ist injektiv, da T_N Zariski-dicht in V ist. Wir fassen deshalb $\mathbb{C}[V]$ als Unter algebra von $\mathbb{C}[M]$ auf.

Wie zuvor operiert T_N durch $(t \cdot f)(p) = f(t^{-1} \cdot p)$ für $t \in T_N$, $f \in \mathbb{C}[V]$ und $p \in V$ auf $\mathbb{C}[V]$. Also ist $\mathbb{C}[V]$ ein invarianter Unterraum von $\mathbb{C}[M]$. Nach Lemma 1.1.16 gilt also

$$\mathbb{C}[V] = \bigoplus_{\chi^m \in \mathbb{C}[V]} \mathbb{C} \cdot \chi^m.$$

Es gilt also $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[S]$ für die Halbgruppe $S = \{m \in M \mid \chi^m \in \mathbb{C}[V]\}$.

Ferner wird $\mathbb{C}[V]$ von endlich-vielen Elementen f_1, \dots, f_s erzeugt. Indem man alle f_i als Summen von Charakteren ausdrückt, erhält man ein endliches Erzeugendensystem der Halbgruppe S (Check!), die damit affin ist. □

1.2. Kegel und affine torische Varietäten

Die meisten der konvexgeometrischen Aussagen in [CLS] in diesem Abschnitt werden dort nicht bewiesen. Die meisten Beweise geben wir hier, oder wenigstens die Idee. Der Rest findet sich z.B. in meinem Skript über Konvexität oder im Buch von Barvinok.

Konvexe polyedrische Kegel. Es sei $N_{\mathbb{R}}$ ein reeller Vektorraum und sei $M_{\mathbb{R}}$ sein Dualraum. Für ein lineares Funktional $m \in M_{\mathbb{R}}$ und $u \in N_{\mathbb{R}}$ schreiben wir die Auswertung als bilineare Paarung $\langle m, u \rangle := m(u)$.

Definition. Eine Teilmenge $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ heißt ein **(konvexer) Kegel**, wenn sie konvex ist, nicht leer und $\lambda x \in \sigma$ für alle $x \in \sigma$ und $\lambda \geq 0$ gilt. Ein Kegel σ heißt **spitz** („strictly convex“ in [CLS]), falls $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$ gilt. Die **Dimension** von σ , geschrieben $\dim(\sigma)$, ist die Dimension des erzeugten Unterraums $\text{Span}(\sigma)$.

Für $m \in M_{\mathbb{R}}$ definieren wir

$$H_m = \{u \in N_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u \rangle = 0\} \subset N_{\mathbb{R}}$$

$$H_m^+ = \{u \in N_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u \rangle \geq 0\} \subset N_{\mathbb{R}}.$$

Ist $m \neq 0$, so ist H_m eine Hyperebene und H_m^+ ein abgeschlossener Halbraum. Die Hyperebene H_m heißt eine **Stützhyperebene** des Kegels σ , falls $\sigma \subset H_m^+$ gilt.

Definition. Es sei $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ ein Kegel. Der **duale Kegel** ist

$$\sigma^\vee = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \text{Für alle } u \in \sigma \text{ gilt } \langle m, u \rangle \geq 0\}.$$

Für $m \in M_{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ gilt also $m \in \sigma^\vee$ genau dann, wenn H_m eine Stützhyperebene von σ ist.

Beispiel. Bild an der Tafel in \mathbb{R}^2 .

Proposition (Bidualität). *Es sei $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ ein abgeschlossener Kegel. Dann gilt*

$$(\sigma^\vee)^\vee = \sigma.$$

Beweisskizze. Die Bidualität ist eine Umformulierung des **Trennungssatzes**: Die Inklusion $\sigma \subset (\sigma^\vee)^\vee$ ist klar. Ist umgekehrt $u \in N_{\mathbb{R}} \setminus \sigma$, dann gibt es eine trennende Hyperebene, d.h. eine Stützhyperebene H_m^+ ($m \in \sigma^\vee$) mit $u \notin H_m^+$. Damit also $u \notin (\sigma^\vee)^\vee$. \square

Definition. Zu jeder Teilmenge $S \subset N_{\mathbb{R}}$, sei $\text{Cone}(S)$ der von S erzeugte Kegel, also der kleinste Kegel, der S enthält. Ist $S \subset N_{\mathbb{R}}$ endlich, so ist explizit

$$\text{Cone}(S) = \left\{ \sum_{u \in S} \lambda_u u \mid \lambda_u \geq 0 \right\} \subset N_{\mathbb{R}},$$

In diesem Fall heißt $\text{Cone}(S)$ **endlich erzeugt**. Insbesondere ist $\text{Cone}(\emptyset) = \{0\}$.

Definition. Ein Kegel $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ heißt **polyedrisch**, wenn er durch endlich-viele lineare Ungleichungen beschrieben ist, d.h. also, wenn es $m_1, \dots, m_s \in M_{\mathbb{R}}$ gibt derart, dass

$$\sigma = H_{m_1}^+ \cap \dots \cap H_{m_s}^+ = \{u \in N_{\mathbb{R}} \mid \langle m_i, u \rangle \geq 0 \text{ für } i = 1, \dots, s\}.$$

Beispiele.

- (1) Der positive Orthant in \mathbb{R}^n ist von den Standardbasisvektoren erzeugt. Er ist auch polyedrisch (nämlich gleich $H_{e_1}^+ \cap \dots \cap H_{e_n}^+$).
- (2) Jeder lineare Unterraum von $N_{\mathbb{R}}$ ist ein endlich erzeugter Kegel wegen $\text{Span}(v_1, \dots, v_n) = \text{Cone}(\pm v_1, \dots, \pm v_n)$.
- (3) Ein Beispiel für einen nicht-polyedrischen Kegel ist die Eistüte

$$\{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid u^2 + v^2 \leq w^2, w \geq 0\}.$$

- (4) Das Dual eines endlich erzeugten Kegels ist polyedrisch. Ist nämlich $\sigma = \text{Cone}(S)$, so gilt offenbar

$$\sigma^\vee = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u \rangle \geq 0 \text{ für alle } u \in S\}.$$

Definition. Sei $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ ein Kegel. Eine **Seite** von σ ist der Schnitt mit einer Stützhyperebene, also eine Teilmenge τ der Form $\tau = H_m \cap \sigma$ für $m \in \sigma^\vee$. Wir schreiben kurz $\tau \leq \sigma$. Eine **echte Seite** ist eine, die nicht ganz σ ist.

Lemma 1.2.7. Sei τ eine Seite eines Kegels σ . Dann ist τ konvex und für alle $v, w \in \sigma$ mit $v + w \in \tau$ gilt $v, w \in \tau$.

Beweis. Leicht. Bild an der Tafel. □

Diese Eigenschaft wird in der Konvexgeometrie gern als Definition einer Seite hergenommen (zum Beispiel in meinem Vorlesungsskript zur Konvexität). Seiten nach der Definition hier sind etwas spezieller und heißen dann exponierte Seiten.

Seiten von Codimension 1 (also von Dimension $\dim(\sigma) - 1$) heißen **Facetten**. Seiten der Dimension 1 heißen **Extremalstrahlen** (oder Kanten). Jeder Extremalstrahl von σ ist von der Form $\text{Cone}(u)$, $u \in \sigma \setminus \{0\}$. Ohne Beweis verwenden wir:

Satz (Satz von Krein-Milman). *Jeder abgeschlossene spitze Kegel wird von der Menge seiner Extremalstrahlen erzeugt.* □

Proposition 1.2.4. *Ein Kegel ist genau dann polyedrisch, wenn er endlich erzeugt ist. Das Dual eines polyedrischen Kegels ist polyedrisch.*

Beweisskizze. Sei σ polyedrisch. Reduziere zunächst auf den Fall, dass σ spitz ist (Übung). Dann ist σ die konvexe Hülle seiner Extremalstrahlen nach dem Satz von Krein-Milman. Aus der Beschreibung von σ durch endlich-viele Ungleichungen zeigt man, dass es nur endlich viele Extremalstrahlen geben kann. Jeder Extremalstrahl wird von einem Vektor erzeugt. Also ist σ endlich erzeugt.²

Ist umgekehrt $\sigma = \text{Cone}(S)$ mit $S \subset N_{\mathbb{R}}$ endlich, so ist σ^\vee polyedrisch (siehe oben) und damit endlich-erzeugt, wie gerade gesehen. Also ist $\sigma = (\sigma^\vee)^\vee$ polyedrisch. □

Lemma 1.2.6. *Es sei σ ein polyedrischer Kegel.*

- (a) *Jede Seite von σ ist selbst ein polyedrischer Kegel.*

²Alternativ zu diesem Beweis kann man die sogenannte Fourier-Motzkin-Elimination verwenden, die besagt, dass ein lineares Bild eines polyedrischen Kegels polyedrisch ist.

(b) Der Schnitt von zwei Seiten von σ ist wieder eine Seite von σ .

(c) Eine Seite einer Seite von σ ist wieder eine Seite von σ .

Beweisskizze. (a) ist klar. (b) Sind $\tau_1, \tau_2 \leq \sigma$, etwa $\tau_i = H_{m_i} \cap \sigma$ mit $m_i \in \sigma^\vee$ ($i = 1, 2$), so gilt $\tau_1 \cap \tau_2 = H_{m_1+m_2} \cap \sigma$. Für (c) muss man ein wenig arbeiten. (Es bietet sich zum Beispiel an, zunächst die Umkehrung von Lemma 1.2.7 für polyedrische Kegel zu beweisen.) \square

Proposition 1.2.8. *Es sei $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ ein polyedrischer Kegel.*

(a) *Ist $\sigma = H_{m_1}^+ \cap \dots \cap H_{m_s}^+$ für $m_1, \dots, m_s \in \sigma^\vee$, so gilt $\sigma^\vee = \text{Cone}(m_1, \dots, m_s)$.*

(b) *Ist $\dim \sigma = \dim N_{\mathbb{R}}$, dann gibt es m_1, \dots, m_s wie in (a) derart, dass die Seiten $H_{m_i} \cap \sigma$ genau die Facetten von σ sind.*

(c) *Jede echte Seite ist der Durchschnitt aller Facetten, in denen sie enthalten ist.*

Beweisskizze. (a) wird auch das Farkassche Lemma genannt. Es gilt $\sigma = H_{m_1}^+ \cap \dots \cap H_{m_s}^+ = \text{Cone}(m_1, \dots, m_s)^\vee$ und damit $\sigma^\vee = \text{Cone}(m_1, \dots, m_s)$ nach Bidualität.

(b) und (c) Übung. \square

Beispiel 1.2.9. Es sei $\sigma = \text{Cone}(e_1, e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3) \subset \mathbb{R}^3$ (Bild). Wir ermitteln die Facetten von σ und erhalten

$$\sigma^\vee = \text{Cone}(e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2 - e_3) \subset \mathbb{R}^3$$

(wobei wir \mathbb{R}^3 mit seinem Dualraum identifiziert haben). Die Gitterpunkte dieses Kegels waren in Aufgabe 4 an der Reihe. Umgekehrt ermittelt man nun die Facetten von σ^\vee und erhält, gemäß Bidualität, genau σ zurück. Man beachte, dass die Umwandlung von der Darstellung durch endlich viele Erzeuger in die durch Facettenungleichungen in diesem Fall von Hand ziemlich einfach ist. Im allgemeinen ist das aber algorithmisch schwierig.

Sei $\tau \leq \sigma \subset N_{\mathbb{R}}$, dann definieren wir

$$\tau^\perp = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \text{Für alle } u \in \tau: \langle m, u \rangle = 0\}$$

$$\tau^* = \{m \in \sigma^\vee \mid \text{Für alle } u \in \tau: \langle m, u \rangle = 0\} = \sigma^\vee \cap \tau^\perp.$$

Definition. Es sei $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ ein Kegel. Das **relative Innere** von σ ist das topologische Innere von σ im Vektorraum $\text{Span}(\sigma)$ und wird mit $\text{Relint}(\sigma)$ bezeichnet.

In Aufgabe 7 zeigen wir die folgende Charakterisierung des relativen Inneren:

$$\text{Relint}(\sigma) = \{u \in \sigma \mid \text{Für alle } m \in \sigma^\vee \setminus \sigma^\perp: \langle m, u \rangle > 0\}.$$

Beispiel. Bild an der Tafel dazu.

Zu jedem Punkt $u \in \sigma$ gibt es eine eindeutig bestimmte Seite $\tau \leq \sigma$ mit $u \in \text{Relint}(\tau)$ (vgl. Aufgabe 7). Mit anderen Worten, es gilt

Lemma. *Ein polyedrischer Kegel σ ist die disjunkte Vereinigung der $\text{Relint}(\tau)$ mit $\tau \leq \sigma$.* \square

Das folgende werden wir ohne Beweis verwenden: Zwischen den Seiten eines polyedrischen Kegels gibt es keine „Dimensionslücken“.

Lemma. *Es sei $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ polyedrischer Kegel und $\tau \leq \sigma$. Dann gibt es eine Kette*

$$\tau = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_{r-1} \leq \tau_r = \sigma$$

mit $\dim(\sigma) - \dim(\tau_i) = r - i$. □

Für allgemeine Kegel gilt das nicht. Die Eistüte in \mathbb{R}^3 hat z.B. eindimensionale Seiten und eine dreidimensionale, aber keine zweidimensionalen.

Proposition 1.2.10. *Es sei σ ein polyedrischer Kegel und τ eine Seite.*

- (a) τ^* ist eine Seite von σ^\vee .
- (b) Es gilt $(\tau^*)^* = \tau$, und die Abbildung $\tau \mapsto \tau^*$ ist eine inklusionsumkehrende Bijektion zwischen den Seiten von σ und denen von σ^\vee .
- (c) Es gilt $\dim \tau + \dim \tau^* = \dim N_{\mathbb{R}}$.

Beweisskizze. (a) Für $u \in \text{Relint}(\tau)$ gilt $\tau^* = \sigma^\vee \cap H_u$ (Aufgabe 7b).

(b) Aus $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \sigma$ folgt $\tau_2^* \leq \tau_1^* \leq \sigma^\vee$ per Definition. Außerdem ist jede Seite von σ^\vee von der Form τ^* für eine Seite τ von σ (nach der Beschreibung in (a)). Weiter ist $\tau \subset \tau^{**}$ unmittelbar aus der Definition. Damit gilt auch $\tau^* \subset \tau^{***} \subset \tau^*$, also $\tau^* = \tau^{***}$. Dies gilt für beliebiges τ . Wegen Surjektivität von $\tau \mapsto \tau^*$ folgt also $\tau = \tau^{**}$.

(c) Betrachte eine maximale Kette von Seiten $\tau \not\subseteq \tau_1 \not\subseteq \dots \not\subseteq \tau_r = \sigma$ mit $\dim(\sigma) - \dim(\tau_i) = r - i$ (nach Lemma oben). Nach Dualisieren ist die Kette $\sigma^* \not\subseteq \tau_r^* \not\subseteq \dots \not\subseteq \tau^*$ immer noch maximal. Deshalb gilt $\dim \tau^* - \dim \sigma^* = \dim \sigma - \dim \tau$ und damit $\dim \tau + \dim \tau^* = \dim \sigma + \dim \sigma^* = \dim \text{Span}(\sigma) + \dim \text{Span}(\sigma)^\perp = \dim N_{\mathbb{R}}$. □

Das folgende Lemma werden wir des öfteren brauchen. Es ist nicht sehr schwer zu beweisen, aber nicht mehr ganz so anschaulich wie die bisherigen Aussagen.

Lemma 1.2.13 (Trennungslemma). *Es seien σ_1, σ_2 polyedrische Kegel in $N_{\mathbb{R}}$. Angenommen $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$ ist eine Seite von beiden. Dann gilt*

$$\tau = H_m \cap \sigma_1 = H_m \cap \sigma_2$$

für jedes $m \in \text{Relint}(\sigma_1^\vee \cap (-\sigma_2)^\vee)$.

Beweis. Es gilt

$$\sigma_1^\vee \cap (-\sigma_2)^\vee = (\sigma_1 - \sigma_2)^\vee.$$

(Check!) Sei $m \in \text{Relint}(\sigma_1^\vee \cap (-\sigma_2)^\vee)$. Nach Aufgabe 9(d) angewandt auf $\sigma_1 - \sigma_2$ schneidet H_m die minimale Seite von $\sigma_1 - \sigma_2$ aus und es gilt

$$H_m \cap (\sigma_1 - \sigma_2) = (\sigma_1 - \sigma_2) \cap (\sigma_2 - \sigma_1).$$

Behaupte ferner, dass

$$(\sigma_1 - \sigma_2) \cap (\sigma_2 - \sigma_1) = \tau - \tau$$

gilt. Die Inklusion von rechts nach links ist klar wegen $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$. Für die andere Inklusion, sei $u \in (\sigma_1 - \sigma_2) \cap (\sigma_2 - \sigma_1)$, etwa $u = a_1 - a_2 = b_2 - b_1$ mit $a_1, b_1 \in \sigma_1$ und $a_2, b_2 \in \sigma_2$. Dann folgt $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 \in \tau$ und damit $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \tau$, da τ eine Seite ist (Lemma 1.2.7). Also folgt $u = a_1 - a_2 \in \tau - \tau$, wie behauptet.

Wir haben also $H_m \cap (\sigma_1 - \sigma_2) = \tau - \tau$ bewiesen. Es folgt durch Schneiden mit σ_1

$$H_m \cap \sigma_1 = (\tau - \tau) \cap \sigma_1 = \tau,$$

wobei die zweite Gleichheit wiederum Lemma 1.2.7 verwendet: Sind $u, v \in \tau$ mit $u - v = w \in \sigma_1$, so folgt $\tau \ni u = v + w$ mit $v, w \in \sigma_1$, also $w \in \tau$. Analog sieht man $H_m \cap (-\sigma_2) = -\tau$ und damit $H_m \cap \sigma_2 = \tau$. \square

Rationale polyedrische Kegel. Es seien nun M und N duale Gitter mit dazugehörigen dualen Vektorräumen $M_{\mathbb{R}} = N \otimes \mathbb{R}$ und $N_{\mathbb{R}} = N \otimes \mathbb{R}$.

Definition. Ein polyedrischer Kegel $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ heißt **rational**, wenn es eine endlich Teilmenge S von N mit $\sigma = \text{Cone}(S)$ gibt.

Das folgende verwenden wir ohne Beweis:

Satz. *Das Dual und alle Seiten eines rationalen polyedrischen Kegels sind rational.* \square

Lemma. *Es sei σ ein spitzer rationaler polyedrischer Kegel und $\rho \leq \sigma$ ein Extremalstrahl. Dann wird die Halbgruppe $\rho \cap N$ von einem eindeutig bestimmten Element erzeugt.*

Beweis. Die Gruppe $N \cap (\rho - \rho)$ ist eine diskrete Untergruppe von $\rho - \rho = \text{Span } \rho \cong \mathbb{R}$ und damit zyklisch. (Denn ist $\{0\} \neq \Gamma \subset \mathbb{R}$ eine diskrete Untergruppe, dann gibt es $x = \min\{y \in \Gamma \mid y > 0\}$. Nun wird Γ von x erzeugt. Denn für $y \in \Gamma$, schreibe $y = nx + z$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq z < x$. Wegen $z = y - nx \in \Gamma$ folgt $z = 0$.) Wird also $N \cap (\rho - \rho)$ von $u \in N_{\mathbb{R}}$ erzeugt, so wird die Halbgruppe $N \cap \rho$ entweder von u oder von $-u$ erzeugt, da σ spitz ist. \square

Wir nennen den eindeutig bestimmten Erzeuger eines Extremalstrahls wie im Lemma den **Halbstrahlgenerator** von ρ („ray generator“ in [CLS]).

Lemma 1.2.15. *Ein spitzer rationaler polyedrischer Kegel σ in $N_{\mathbb{R}}$ wird von seinen Halbstrahlgeneratoren erzeugt.*

Beweis. Sei S die (endliche) Menge aller Halbstrahlgeneratoren von σ . Nach dem Satz von Krein-Milman wird σ von seinen Extremalstrahlen erzeugt. Da die Extremalstrahlen selbst rational sind, werden sie wiederum als Kegel von ihren Halbstrahlgeneratoren erzeugt. Es folgt $\sigma = \text{Cone}(S)$. \square

Es sei σ ein rationaler polyedrischer Kegel. Wir schreiben

$$S_{\sigma} = \sigma^{\vee} \cap M.$$

Dieses S_{σ} ist eine Unterhalbgruppe von M .

Proposition 1.2.17 (Lemma von Gordan). *Es sei σ ein rationaler polyedrischer Kegel. Die Halbgruppe S_{σ} ist endlich erzeugt und damit affin.*

Beweis. Sei $T \subset M$ eine endliche Teilmenge mit $\sigma^{\vee} = \text{Cone}(T)$. Setze

$$K = \left\{ \sum_{m \in T} a_m m \mid 0 \leq a_m \leq 1 \right\}.$$

Da K kompakt ist, ist $K \cap M$ endlich. Behaupte, dass S_σ von $T \cup (K \cap M)$ erzeugt wird. Sei dazu $w \in S_\sigma$ und schreibe $w = \sum_{m \in T} a_m m$ mit $a_m \geq 0$. Dann gilt

$$w = \sum_{m \in T} \lfloor a_m \rfloor m + \sum_{m \in T} (a_m - \lfloor a_m \rfloor) m,$$

wobei $\lfloor \cdot \rfloor$ die übliche Abrundungsfunktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ ist. Nun liegt der rechte Summand in $K \cap M$ und die Behauptung folgt. \square

Beachte, dass S_σ (im Unterschied zu σ) in der Regel nicht von den Halbstrahlgeneratoren erzeugt wird.

Beispiel. Die Voraussetzung, dass σ rational sei, ist entscheidend. Es sei τ eine irrationale reelle Zahl und

$$\sigma = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \geq 0 \text{ und } b \geq \tau a\}.$$

Dann ist $\sigma \cap \mathbb{N}^2$ keine endlich-erzeugte Halbgruppe. (Aufgabe 10).

Lemma. Für jede endliche Teilmenge $S \subset M$ gilt $\text{rk } \mathbb{Z}S = \dim_{\mathbb{R}}(\text{Span}(S))$.

Beweis. Per Definition ist $M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Mit $\mathbb{Z}S \cong \mathbb{Z}^r$ für $r = \text{rk } \mathbb{Z}S$ folgt $\text{Span}(S) \cong \mathbb{Z}^r \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^r$. \square

Auch hier beachte man, dass die Aussage des Lemmas nur wegen der Voraussetzung $S \subset M$ (und nicht nur $S \subset M_{\mathbb{R}}$) richtig ist. Zum Beispiel erzeugt $S = \{1, \pi\} \subset \mathbb{R}$ eine freie Untergruppe vom Rang 2 in \mathbb{R} (die demnach nicht diskret ist).

Nun seit langem mal wieder was über torische Varietäten:

Satz 1.2.18. Es sei $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ ein rationaler polyedrischer Kegel mit Halbgruppe S_σ . Dann ist

$$U_\sigma = \text{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma])$$

eine affine torische Varietät. Außerdem sind äquivalent:

- (i) $\dim U_\sigma = \dim N_{\mathbb{R}}$.
- (ii) Der Torus von U_σ ist $T_N = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$.
- (iii) σ ist spitz.

Beweis. Dass U_σ eine torische Varietät ist, wissen wir nach dem Lemma von Gordan und dem Hauptergebnis über torische Varietäten (Satz 1.1.17).

Es sei $n = \dim N_{\mathbb{R}}$. Um die Äquivalenz von (i)–(iii) zu beweisen, betrachte stattdessen:

- (i') $\dim U_\sigma = n$
- (ii') $\text{rk } \mathbb{Z}S_\sigma = n$
- (iii') $\dim \sigma^\vee = n$.

Die Äquivalenz von (i') und (ii') ist einfach die Aussage, dass die Dimension einer torischen Varietät mit der Dimension ihres Torus und damit mit dem Rang des Charaktergitters $\mathbb{Z}S_\sigma$ übereinstimmt. Die Äquivalenz von (ii') und (iii') folgt aus dem obigen Lemma.

Nach Aufgabe 8 gilt (iii) \Leftrightarrow (iii'). Zeigen nun noch, dass (ii) \Leftrightarrow (ii'). Behaupte zunächst, dass $M/\mathbb{Z}S_\sigma$ torsionsfrei ist. Sei $m \in M$ und angenommen es gibt $k > 1$ mit $km \in \mathbb{Z}S_\sigma$, etwa $km = m_1 - m_2$ mit $m_1, m_2 \in S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$. Dann gilt

$$m + m_2 = \frac{1}{k}m_1 + \frac{k-1}{k}m_2 \in \sigma^\vee,$$

da σ^\vee konvex ist. Damit folgt $m = (m_1 + m_2) - m_2 \in \mathbb{Z}S_\sigma$. Also ist $M/\mathbb{Z}S_\sigma$ torsionsfrei. Dies zeigt: Der Torus von U_σ ist gleich T_N genau dann, wenn $M = \mathbb{Z}S_\sigma$ gilt und dies wiederum genau dann, wenn $\text{rk } \mathbb{Z}S_\sigma = n$. \square

Im Moment ist noch nicht recht erkennbar, welche Rolle das Dualisieren spielt, also warum wir nicht direkt von σ^\vee ausgehen anstatt von σ . Das wird später klar werden, wenn wir uns ans Verkleben machen.

Definition. Ein spitzer rationaler polyedrischer Kegel in $\mathbb{N}_\mathbb{R}$ heißt **simplizial**, wenn seine Halbstrahlgeneratoren über \mathbb{Q} (äquivalent über \mathbb{R}) linear unabhängig sind. Er heißt **glatt** oder **regulär**, wenn sich die Halbstrahlgeneratoren zu einer \mathbb{Z} -Basis von N ergänzen lassen.

Beispiel 1.2.20. Es sei $\sigma = \text{Cone}(e_1, e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3) \subset N_\mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ mit $N = \mathbb{Z}^3$. Dann haben wir in den Übungen gesehen, dass U_σ die affine torische Varietät $\mathbf{V}(xy - zw)$ ist. Beachte, dass σ nicht simplizial ist (schon gar nicht glatt).

Beispiel 1.2.21. Sei $0 \leq r \leq n$ und $\sigma = \text{Cone}(e_1, \dots, e_r) \subset \mathbb{R}^n$. Dieser Kegel ist glatt und

$$\sigma^\vee = \text{Cone}(e_1, \dots, e_r, \pm e_{r+1}, \dots, \pm e_n)$$

ist die zugehörige affine torische Varietät (Check!).

$$U_\sigma = \text{Spec}(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_r, x_{r+1}^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]) = \mathbb{C}^r \times (\mathbb{C}^*)^{n-r}.$$

Beispiel 1.2.22. Sei $d > 0$ eine natürliche Zahl und $\sigma = \text{Cone}(de_1 - e_2, e_2) \subset \mathbb{R}^2$. Der duale Kegel ist $\sigma^\vee = \text{Cone}(e_1, e_1 + de_2)$. Die affine Halbgruppe S_σ wird von den Gitterpunkten $(1, i)$ für $0 \leq i \leq d$ erzeugt. (Bild). (Aufgabe 11)

Die zugehörige affine torische Varietät U_σ ist der Abschluss des Bildes von

$$\Phi: \begin{cases} (\mathbb{C}^*)^2 & \rightarrow & \mathbb{C}^{d+1} \\ (s, t) & \mapsto & (s, st, st^2, \dots, st^d) \end{cases}$$

Diese Varietät ist isomorph zum **rationalen Normalenkegel** in \mathbb{C}^{d+1} , der durch das Verschwinden aller 2×2 -Minoren der Matrix

$$\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{d-2} & x_{d-1} \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{d-1} & x_d \end{bmatrix}$$

gegeben ist. Die Kegel σ und σ^\vee sind simplizial, aber nicht glatt.

Definition. Ein Element $m \neq 0$ in einer affinen Halbgruppe S heißt **irreduzibel**, wenn eine Darstellung $m = m' + m''$ mit $m', m'' \in S$ nur für $m' = 0$ oder $m'' = 0$ möglich ist.

Proposition 1.2.23. Es sei $\sigma \subset N_\mathbb{R}$ ein spitzer rationaler polyedrischer Kegel mit nicht-leerem Inneren und sei $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$. Sei \mathcal{H} die Menge aller irreduziblen Elemente in S_σ . Es gelten:

- (a) \mathcal{H} ist endlich und erzeugt S_σ .
 (b) \mathcal{H} enthält die Halbstrahlgeneratoren von σ^\vee .
 (c) \mathcal{H} ist das minimale Erzeugendensystem von S_σ .

Beweis. Nach Aufgabe 8 ist σ^\vee spitz. Es gibt also $u \in \sigma \cap N$ derart, dass $\langle m, u \rangle > 0$ für alle $m \in \sigma^\vee \setminus \{0\}$. Ist nun $m \in S_\sigma$ nicht irreduzibel, etwa $m = m' + m''$ mit $m', m'' \in S_\sigma \setminus \{0\}$, dann folgt

$$\langle m, u \rangle = \langle m', u \rangle + \langle m'', u \rangle$$

mit $0 < \langle m', u \rangle < \langle m, u \rangle$ und $0 < \langle m'', u \rangle < \langle m, u \rangle$. Da alle diese Werte ganzzahlig sind, können wir Induktion nach $\langle m, u \rangle$ machen und schließen, dass jedes Element von S_σ eine Summe von irreduziblen Elementen ist. (b) bedeutet einfach, dass jeder Halbstrahlgenerator irreduzibel ist (Übung). (c) Es ist offensichtlich, dass \mathcal{H} in jedem Erzeugendensystem von S_σ enthalten ist. \square

Definition. Die Menge \mathcal{H} aller irreduziblen Elemente wird die **Hilbert-Basis** von S_σ genannt, ihre Elemente die **minimalen Erzeuger**.

1.3. Eigenschaften affiner torischer Varietäten

Es sei S eine affine Halbgruppe und $V = \text{Spec}(\mathbb{C}[S])$ die zugehörige affine Varietät. Wir wollen die Punkte von V und die Operation des Torus auf V mit Hilfe von S verstehen.

Erinnerung: Als abstrakte Varietät ist V einfach die Menge $\text{Hom}(\mathbb{C}[S], \mathbb{C})$. Fassen wir den Punkt $p \in V$ als Homomorphismus $p: \mathbb{C}[S] \rightarrow \mathbb{C}$ auf, so ist $\chi^m(p)$ definiert als $p(\chi^m)$!

Sei $p \in V$ ein Punkt. Definiere einen Homomorphismus $\gamma_p: S \rightarrow \mathbb{C}$ von Halbgruppen durch $\gamma_p(m) = \chi^m(p)$ für $m \in S$. Dabei fassen wir χ^m auf als Element von $\mathbb{C}[S]$ und damit als reguläre Funktion auf V . Außerdem fassen wir \mathbb{C} als multiplikative Halbgruppe auf.

Wir geben zu $p \mapsto \gamma_p$ die Umkehrabbildung an: Sei $\gamma: S \rightarrow \mathbb{C}$ ein Halbgruppenhomomorphismus. Da die χ^m , $m \in M$, eine Basis von $\mathbb{C}[S]$ als \mathbb{C} -Vektorraum bilden, erhalten wir eine surjektive lineare Abbildung $\mathbb{C}[S] \rightarrow \mathbb{C}$ durch $\sum_{m \in S} a_m \chi^m \mapsto \sum_{m \in S} a_m \gamma(m)$. Diese Abbildung ist ein Homomorphismus von \mathbb{C} -Algebren, also ein Punkt von $V = \text{Hom}(\mathbb{C}[S], \mathbb{C})$, den wir mit p_γ bezeichnen.

Proposition 1.3.1. *Es sei S eine affine Halbgruppe und $V = \text{Spec}(\mathbb{C}[S])$. Die Abbildung $p \mapsto \gamma_p$ ist eine Bijektion von V auf die Menge der Halbgruppenhomomorphismen $S \rightarrow \mathbb{C}$.*

Beweis. Dass die beiden Abbildungen $p \mapsto \gamma_p$ und $\gamma \mapsto p_\gamma$ zueinander invers sind, sieht man durch bloßes Symbolgeschiebe: Für $\gamma: S \rightarrow \mathbb{C}$ gilt $\gamma_{p_\gamma}(m) = \chi^m(p_\gamma) = \gamma(\chi^m) = \gamma(m)$, also $\gamma_{p_\gamma} = \gamma$. Sei umgekehrt $p \in V$ ein Punkt aufgefasst als Homomorphismus $p: \mathbb{C}[S] \rightarrow \mathbb{C}$. Dann ist $(\chi^m)(p_{\gamma_p}) = \gamma_p(\chi^m) = \chi^m(p)$ für alle $m \in M$, also $p = p_{\gamma_p}$. \square

Wenn wir uns eine Einbettung der torischen Varietät $\text{Spec}(\mathbb{C}[S])$ verschaffen, dann sieht diese Korrespondenz folgendermaßen aus: Es sei $S \subset M$ und $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\}$ ein Erzeugendensystem von S . Dann ist also $V \cong Y_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{C}^s$. Sei $\gamma: S \rightarrow \mathbb{C}$ ein Halbgruppenhomomorphismus und betrachte den Punkt $p = (\gamma(m_1), \dots, \gamma(m_s))$. Dann gilt $p \in Y_{\mathcal{A}}$. Denn nach Prop. 1.1.9 reicht es dafür zu zeigen, dass die Binome $x^\alpha - y^\beta$ in p verschwinden, für alle Paare von Exponenten $\alpha = (a_1, \dots, a_s), \beta = (b_1, \dots, b_s) \in \mathbb{N}^s$ mit

$$\sum_{i=1}^s a_i m_i = \sum_{i=1}^s b_i m_i.$$

Da γ ein Halbgruppenhomomorphismus ist, folgt dies aus

$$\prod_{i=1}^s \gamma(m_i)^{a_i} = \gamma\left(\sum_{i=1}^s a_i m_i\right) = \gamma\left(\sum_{i=1}^s b_i m_i\right) = \prod_{i=1}^s \gamma(m_i)^{b_i}.$$

Für diesen Punkt p gilt $\gamma = \gamma_p$ (Check!).

Als nächstes beschreiben wir die Toruswirkung auf V . Für $Y_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{C}^s$ ist der Torus ja einfach $Y_{\mathcal{A}} \cap (\mathbb{C}^*)^s$ und die Operation ist induziert durch die von $(\mathbb{C}^*)^s$ auf \mathbb{C}^s . Intrinsisch geht das jetzt so: Sei $t \in T_N$ und sei $p \in V$. Dann gilt $\gamma_{t \cdot p}(m) = \chi^m(t \cdot p) = \chi^m(t) \chi^m(p) = \chi^m(t) \gamma_p(m)$. Damit haben wir den Punkt $t \cdot p$ als Halbgruppenhomomorphismus bestimmt. Diese Beschreibung werden wir später benutzen.

Definition. Eine affine Halbgruppe $S \subset M$ heißt **spitz**, wenn $S \cap (-S) = \{0\}$ gilt, d.h. also wenn S keine invertierbaren Elemente außer 0 besitzt.

Proposition 1.3.2. *Es sei V eine affine torische Varietät.*

(a) *Die Operation des Torus T_N auf V hat genau dann einen Fixpunkt, wenn S spitz ist. In diesem Fall ist der Fixpunkt durch den Halbgruppenhomomorphismus*

$$m \mapsto \begin{cases} 1 & m = 0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases}$$

gegeben.

(b) *Ist $V = Y_{\mathcal{A}}$ für $\mathcal{A} \subset S \setminus \{0\}$, so hat die Operation des Torus genau dann einen Fixpunkt, wenn $0 \in Y_{\mathcal{A}}$ gilt, und in diesem Fall ist 0 der eindeutige Fixpunkt.*

Beweis. Es sei $p \in V$. Genau dann ist p ein Fixpunkt, wenn $t \cdot p = p$ für alle $t \in T_N$ gilt. Dies bedeutet gerade $\gamma_{t,p}(m) = \chi^m(t) \gamma_p(m) = \gamma_p(m)$ für alle $m \in M$. Für $m = 0$ ist diese Gleichung immer erfüllt. Für $m \neq 0$ gibt es immer $t \in T_N$ mit $\chi^m(t) \neq 1$, so dass die Gleichung genau für $\gamma_p(m) = 0$ erfüllt ist. Andererseits ist die Abbildung $\gamma: m \mapsto 0$ für alle $m \neq 0$ und $0 \mapsto 1$ genau dann ein Halbgruppenhomomorphismus, wenn S spitz ist. (Denn sonst enthält S eine Einheit, die nicht auf 0 abgebildet werden kann.) Das beweist (a). Ist $V = Y_{\mathcal{A}}$ mit $0 \notin \mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\}$, so korrespondiert mit γ der Punkt $(\gamma(m_1), \dots, \gamma(m_s)) = 0$. Andererseits ist 0 der Fixpunkt der Operation von $(\mathbb{C}^*)^s$ auf \mathbb{C}^s . \square

Definition. Eine affine Halbgruppe $S \subset M$ heißt **saturiert** (in M), wenn folgendes gilt: Für alle ganzen Zahlen $k > 0$ und alle $m \in M$ folgt aus $km \in S$ bereits $m \in S$.

Beispiel. Ist $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ ein polyedrischer Kegel, so ist $S_{\sigma} = \sigma^{\vee} \cap M$ saturiert.

Definition. Zur Erinnerung: Eine irreduzible affine Varietät V heißt **normal**, wenn ihr Koordinatenring $\mathbb{C}[V]$ **ganz abgeschlossen** ist. Dies bedeutet: Gibt es ein normiertes Polynom $P \in \mathbb{C}[V][X]$ und ist $f \in \mathbb{C}(V) = \text{Quot}(\mathbb{C}[V])$ eine rationale Funktion mit $P(f) = 0$ in $\mathbb{C}(V)$, so gilt $f \in \mathbb{C}[V]$.

Die Definition ist, vorsichtig ausgedrückt, geometrisch unintuitiv. Sie bedeutet aber, dass die Singularitäten von V nicht allzu schlimm sein dürfen. Aus Normalität folgt insbesondere, dass der singuläre Ort von V mindestens Codimension 2 in V hat. (V hat also keine „Knicke“). Die Umkehrung gilt allerdings nicht.

Beispiele.

- (1) Jeder faktorielle Ring ist ganz abgeschlossen. Deswegen ist jede Varietät mit faktoriellem Koordinatenring normal, z.B. \mathbb{C}^s .
- (2) Nach obiger Bemerkung ist eine Kurve genau dann normal, wenn sie glatt ist. Die Kurve $V: y^2 = x^3$ in \mathbb{C}^2 ist nicht normal, denn sie hat eine Singularität in $(0, 0)$. Tatsächlich ist $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^3)$ nicht ganz abgeschlossen. Denn $y/x \in \mathbb{C}(V)$ liegt nicht in $\mathbb{C}[V]$; andernfalls müsste es $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$ geben mit $y - xf = g \cdot (y^2 - x^3)$, was ersichtlich unmöglich ist. Aber y/x erfüllt die Ganzheitsgleichung

$$(y/x)^2 = x \quad \text{in } \mathbb{C}(V),$$

ist also eine Nullstelle des normierten Polynoms $P(X) = X^2 - x \in \mathbb{C}[V][X]$.

Zur Übung/Erinnerung machen wir das folgende kleine Lemma:

Lemma. *Es sei A ein Integritätsring und $D \subset A$ eine multiplikative Teilmenge. Ist A ganz abgeschlossen, so auch die Lokalisierung $A_D = \{a/b \mid b \in D\}$.*

Beweis. Es sei $a/b \in \text{Quot}(A)$ mit $a, b \in A$ und es gebe ein normiertes Polynom $P \in A_D[X]$ mit $P(a/b) = 0$, etwa $P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} (a_i/d_i)X^i$. Betrachte die Gleichung

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n + \frac{a_{n-1}}{d_{n-1}}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \cdots + \frac{a_0}{d_0} = 0.$$

Multiplikation mit $d = (d_{n-1} \cdots d_0)^n$ ergibt eine Gleichung

$$\left(\frac{ad}{b}\right)^n + a_{n-1}d'_{n-1}\left(\frac{ad}{b}\right)^{n-1} + \cdots + a_0d'_0 = 0.$$

für gewisse $d'_{n-1}, \dots, d'_0 \in D$. Da A ganz abgeschlossen ist, folgt $ad/b \in A$, also $a/b = (ad/b)(1/d) \in A_D$. \square

Beispiel. Damit ist gezeigt, dass jeder Torus normal ist, denn für $T = (\mathbb{C}^*)^n$ gilt $\mathbb{C}[T] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_{x_1 \cdots x_n}$ (also $D = \{(x_1 \cdots x_n)^k \mid k \geq 0\}$ im Lemma).

Satz 1.3.5. *Es sei V eine affine torische Varietät zum Torus T_N mit Charaktergitter M . Äquivalent sind:*

- (a) V is normal.
- (b) Es gibt eine saturierte affine Halbgruppe $S \subset M$ mit $V = \text{Spec}(\mathbb{C}[S])$.
- (c) Es gibt einen spitzen polyedrischen Kegel $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ mit $V = \text{Spec}(\mathbb{C}[S_{\sigma}])$.

Beweis. Nach Satz 1.1.17 und Prop. 1.1.14 gibt es eine affine Halbgruppe $S \subset M$ mit $M = \mathbb{Z}S$ und $V = \text{Spec}(\mathbb{C}[S])$. Nach dem Beweis von 1.1.17 gilt dabei $S = \{m \in M \mid \chi^m \in \mathbb{C}[V]\}$.

(a) \Rightarrow (b): Es sei V normal, also $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[S]$ ganz abgeschlossen. Es gelte $km \in S$ für $k > 0$ und $m \in M$. Dann ist $\chi^m \in \mathbb{C}(V) = \text{Quot}(\mathbb{C}[T_N])$ (da $T_N \subset V$ Zariski-offen ist). Wegen $km \in S$ gilt $\chi^{km} \in \mathbb{C}[V]$. Nun erfüllt χ^m die Ganzheitsgleichung $X^k - \chi^{km} \in \mathbb{C}[V][X]$. Also folgt $\chi^m \in \mathbb{C}[V]$ und damit $m \in S$. Also ist S saturiert.

(b) \Rightarrow (c): Es sei $\mathcal{A} \subset S$ ein endliches Erzeugendensystem von S . Aus $\text{rk } \mathbb{Z}\mathcal{A} = n$ folgt $\dim(\text{Cone}(\mathcal{A})) = n$ (nach dem Lemma vor 1.2.18). Deshalb ist der rationale polyedrische Kegel $\sigma = \text{Cone}(\mathcal{A})^{\vee} \subset N_{\mathbb{R}}$ nach Aufgabe 8 spitz. Da $S = \mathbb{N}\mathcal{A}$ saturiert ist, gilt außerdem $S = \text{cone}(\mathcal{A}) \cap M = \sigma^{\vee} \cap M$ nach Aufgabe 14.

(c) \Rightarrow (a): Wir müssen zeigen, dass $\mathbb{C}[S_{\sigma}]$ ganz abgeschlossen ist. Seien ρ_1, \dots, ρ_r die Extremalstrahlen von σ . Da der Kegel σ spitz ist, wird er von seinen Extremalstrahlen erzeugt (Krein-Milman) und es gilt damit

$$\sigma^{\vee} = \bigcap_{i=1}^r \rho_i^{\vee}.$$

Nach Schneiden mit M folgt $S_{\sigma} = \bigcap_{i=1}^r S_{\rho_i}$ und daraus

$$\mathbb{C}[S_{\sigma}] = \bigcap_{i=1}^r \mathbb{C}[S_{\rho_i}] \subset \mathbb{C}[M].$$

Wenn alle $\mathbb{C}[S_{\rho_i}]$ ganz abgeschlossen sind, dann auch $\mathbb{C}[S_\sigma]$. Es genügt also zu zeigen, dass $\mathbb{C}[S_\rho]$ für einen Extremalstrahl ρ ganz abgeschlossen ist. Sei $u_\rho \in \rho \cap N$ der Halbstrahlgenerator von ρ . Nach dem nachfolgenden Lemma besitzt N eine Gitterbasis e_1, \dots, e_n mit $e_1 = u_\rho$. Bezüglich dieser Basis gilt dann also $\rho = \text{Cone}(e_1)$ und damit

$$\mathbb{C}[S_\rho] = \mathbb{C}[x_1, x_2^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}].$$

Damit ist $\mathbb{C}[S_\rho] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_{x_2 \dots x_n}$ eine Lokalisierung eines ganz abgeschlossenen Rings und deshalb ganz abgeschlossen. \square

Lemma. *Es sei N ein Gitter. Ist $N_1 \subset N$ ein Teilgitter derart, dass N/N_1 torsionsfrei ist, so besitzt N_1 ein Komplement in N , d.h. es gibt ein Teilgitter $N_2 \subset N$ mit $N = N_1 \oplus N_2$. Insbesondere: Ist $u \in N$ mit $(1/k) \cdot u \notin N$ für alle $k > 1$, so besitzt N eine Gitterbasis e_1, \dots, e_n mit $e_1 = u$.*

Beweis. Wähle eine Gitterbasis e_1, \dots, e_r von N/N_1 und seien $f_1, \dots, f_r \in N$ mit $\pi(f_i) = e_i$. Definiere $\varphi: N/N_1 \rightarrow N$ durch $\varphi(e_i) = f_i$ und setze $N_2 = \text{im}(\varphi)$. Beachte, dass $\pi(\varphi(v)) = v$ für alle $v \in N/N_1$ gilt. Dann ist N_2 ein Teilgitter mit $N = N_1 \oplus N_2$. Denn $N_1 \cap N_2 = \{0\}$ ist klar nach Definition. Und ist $u \in N$, so gilt $u - \varphi(\pi(u)) \in \ker(\pi) = N_1$, also³

$$u = (u - \varphi(\pi(u))) + \varphi(\pi(u)) \in N_1 + N_2.$$

Für den Zusatz, beachte dass die Voraussetzung an $u \in N$ gerade besagt, dass $N/\mathbb{Z}u$ torsionsfrei ist. Also besitzt $\mathbb{Z}u$ ein Komplement in N , für das wir eine Gitterbasis e_2, \dots, e_n wählen können. \square

Beispiel. Die Kurve $V = \mathbf{V}(y^2 - x^3)$ ist als $Y_{\mathcal{A}}$ für $\mathcal{A} = \{2, 3\} \subset \mathbb{Z}$ gegeben. Hier ist $\mathbb{Z}\mathcal{A} = \mathbb{Z}$, aber $\mathbb{N}\mathcal{A} \not\subset \text{Cone}(\mathcal{A}) \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$, was nochmals zeigt, dass V nicht normal ist.

Beispiel 1.3.6. In Aufgabe 4 haben wir gesehen, dass die affine torische Varietät $V = \mathbf{V}(xy - zw)$ genau U_σ für $\sigma = \text{Cone}(e_1, e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3)$ ist. Der vorangehende Satz zeigt damit, dass V normal ist.

Beispiel 1.3.7. Aus Aufgabe 11 sieht man, dass der Abschluss des Bildes von

$$\Phi: \begin{cases} (\mathbb{C}^*)^2 & \rightarrow & \mathbb{C}^{d+1} \\ (s, t) & \mapsto & (s, st, st^2, \dots, st^d) \end{cases}$$

in \mathbb{C}^{d+1} genau die Varietät U_σ für $\sigma = \text{Cone}(de_1 - e_2, e_2)$ mit $\sigma^\vee = \text{Cone}(e_1, e_1 + de_2) \subset \mathbb{R}^2$ ist. Gleichungen für diese Varietät sind die 2×2 -Minoren der Matrix

$$\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{d-2} & x_{d-1} \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{d-1} & x_d \end{bmatrix},$$

³Kurz und bündig sagen die Algebraiker das gern so: Die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N \xrightarrow{\pi} N/N_1 \longrightarrow 0.$$

spaltet, da N/N_1 torsionsfrei ist. D.h. es gibt $\varphi: N/N_1 \rightarrow N$ mit $\pi \circ \varphi = \text{id}_{N/N_1}$. Daraus folgt $N \cong N_1 \oplus \text{im}(\varphi)$.

also die Polynome $x_{i-1}x_j - x_ix_{j-1}$ für $i, j = 1, \dots, d$. Da die Gleichungen homogen sind, ist U_σ ein Kegel (im Sinn der algebraischen, nicht der konvexen Geometrie) und heißt **rationale Normalenkegel**. Nach obigem Satz ist er tatsächlich normal.

Dieselbe Varietät V hat noch eine andere Parametrisierung, nämlich

$$\Phi_{\mathcal{A}}: \begin{cases} (\mathbb{C}^*)^2 & \rightarrow & \mathbb{C}^{d+1} \\ (s, t) & \mapsto & (s^d, s^{d-1}t, \dots, st^{d-1}, t^d) \end{cases}$$

(Check!) gegeben durch $\mathcal{A} = \{(d, 0), (d-1, 1), \dots, (0, d)\} \subset \mathbb{Z}^2$ (vgl. auch Aufgabe 3). Es sieht zunächst so aus, als ob \mathcal{A} für $d \geq 2$ nicht alle Gitterpunkte im aufgespannten Kegel $\sigma^\vee = \text{Cone}(e_1, e_2)$ erzeugt. Man muss aber beachten, dass sich alle Aussagen auf das Gitter $M = \mathbb{Z}\mathcal{A}$ beziehen, und das ist in diesem Fall das Teilgitter $\{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid i \equiv -j \pmod{d}\} \subset \mathbb{Z}^2$. Bezüglich dieses Gitters gilt tatsächlich $\mathbb{N}\mathcal{A} = \sigma^\vee \cap M$.

Nach den normalen wenden wir uns nun den glatten Varietäten zu.

Definition. Es sei V eine irreducible affine Varietät. Ein Punkt $p \in V$ entspricht einem maximalen Ideal \mathfrak{m}_p von $\mathbb{C}[V]$. Der (Zariski-) **Tangententialraum** von V im Punkt p ist der Dualraum des endlich-dimensionalen Vektorraums $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ und wird mit $T_p(V)$ bezeichnet. Der Punkt p heißt **glatt** (oder nicht-singulär), wenn $\dim T_p(V) = \dim V$ gilt. Die Varietät V heißt **glatt**, wenn sie in jedem ihrer Punkte glatt ist.

Proposition. *Jede glatte Varietät ist normal.*

Beweis. Dies wird in der algebraischen Geometrie üblicherweise durch die algebraische Charakterisierung von Glattheit (bzw. Regularität) über reguläre lokale Ringe bewiesen, von denen man zeigt, dass sie faktoriell und damit ganz abgeschlossen sind. \square

Lemma 1.3.10. *Es sei $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ ein spitzer rationaler polyedrischer Kegel mit nicht-leerem Innern und sei \mathcal{H} die Hilbert-Basis von $S_\sigma \subset M$. Sei U_σ die zugehörige torische Varietät und $p_\sigma \in U_\sigma$ der eindeutige Fixpunkt von U_σ unter der Toruswirkung. Dann gilt*

$$\dim T_{p_\sigma}(U_\sigma) = |\mathcal{H}|.$$

Beweis. Nach Aufgabe 12 besitzt U_σ einen eindeutigen Fixpunkt p_σ , da σ spitz mit nicht-leerem Innern ist, und für dessen maximales Ideal $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{p_\sigma}$ gilt

$$\mathfrak{m} = \langle \chi^m \mid m \in S_\sigma \setminus \{0\} \rangle.$$

Nun gilt für \mathfrak{m} als \mathbb{C} -Vektorraum aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Charaktere

$$\mathfrak{m} = \bigoplus_{m \neq 0} \mathbb{C}\chi^m = \bigoplus_{m \text{ irreduzibel}} \mathbb{C}\chi^m \oplus \bigoplus_{0 \neq m \text{ reduzibel}} \mathbb{C}\chi^m = \left(\bigoplus_{m \in \mathcal{H}} \mathbb{C}\chi^m \right) \oplus \mathfrak{m}^2.$$

Wegen $T_{p_\sigma} = (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*$ folgt $\dim T_{p_\sigma} = \dim(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = |\mathcal{H}|$. \square

Erinnerung: Ein spitzer rationaler polyedrischer Kegel σ heißt **glatt**, wenn sich seine Halbstrahlgeneratoren zu einer Gitterbasis ergänzen lassen. Das heißt gerade, dass wir die Koordinaten so einrichten können, dass $\sigma = \text{Cone}(e_1, \dots, e_r) \subset \mathbb{R}^n$ und damit

$$\sigma^\vee = \text{Cone}(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}^{\pm 1}, \dots, e_n^{\pm 1}) \subset \mathbb{R}^n$$

gelten. Die Varietät U_σ ist dann einfach isomorph zu $(\mathbb{C})^r \times (\mathbb{C}^*)^{n-r}$ (vgl. Bsp. 1.2.21). Wir zeigen nun, dass es keine weiteren glatten affinen torischen Varietäten gibt.

Satz 1.3.12. *Es sei $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ ein spitzer rationaler polyedrischer Kegel. Genau dann ist U_σ glatt, wenn σ glatt ist. Alle glatten affinen torischen Varietäten sind von dieser Form.*

Beweis. Die eine Richtung haben wir gesehen. Für die andere, sei V eine glatte affine torische Varietät. Da glatte Varietäten normal sind, können wir $V = U_\sigma$ für einen spitzen rationalen polyedrischen Kegel $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ annehmen. Es sei $n = \dim U_\sigma = \dim N_{\mathbb{R}}$.

Wir nehmen zunächst an, dass auch $\dim \sigma = n$ gilt, d.h. also, dass σ nicht-leeres Inneres hat. Da der eindeutige Fixpunkt p_σ von U_σ ein glatter Punkt ist, hat der Tangentialraum $T_{p_\sigma}(U_\sigma)$ die Dimension n . Nach Lemma 1.3.10 ist n damit auch die Mächtigkeit der Hilbertbasis \mathcal{H} von $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$. Da \mathcal{H} alle Halbstrahlgeneratoren enthält, hat σ^\vee also höchstens n verschiedene Extremstrahlen. Andererseits ist σ^\vee spitz mit nicht-leerem Inneren (da dasselbe für σ gilt) und hat damit auch mindestens n Extremalstrahlen. (Denn σ^\vee wird von seinen Extremalstrahlen erzeugt.) Also hat σ^\vee genau n Extremalstrahlen und \mathcal{H} besteht aus deren Halbstrahlgeneratoren. Da $M = \mathbb{Z}S_\sigma$ gilt und M den Rang n hat, bilden die Halbstrahlgeneratoren damit eine Basis von M . Also ist σ^\vee von den Elementen einer Gitterbasis erzeugt und ebenso σ , so dass beide glatt sind.

Es gelte nun $\dim \sigma = r < n$. Wir reduzieren auf den vorigen Fall wie folgt: Es sei $N_1 = \text{span } \sigma \cap N$. Da N_1 offenbar saturiert ist, besitzt N_1 ein Komplement $N_2 \subset N$, also $N = N_1 \oplus N_2$. Es gilt $\text{rk } N_1 = r$ und $\text{rk } N_2 = n - r$. Da σ nun sowohl in $(N_1)_{\mathbb{R}}$ als auch $N_{\mathbb{R}}$ liegt, erhalten wir zwei zugehörige torische Varietäten U_{σ, N_1} bzw. $U_{\sigma, N}$ der Dimension r bzw. n . Für die entsprechenden affinen Halbgruppen in $M = M_1 \oplus M_2$ gilt

$$S_{\sigma, N} = S_{\sigma, N_1} \oplus M_2$$

und damit

$$\mathbb{C}[S_{\sigma, N}] \cong \mathbb{C}[S_{\sigma, N_1}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[M_2].$$

Die rechte Seite ist dabei der Koordinatenring von $U_{\sigma, N_1} \times T_{N_2}$. Es gilt also

$$U_{\sigma, N} \cong U_{\sigma, N_1} \times T_{N_2} \cong U_{\sigma, N_1} \times (\mathbb{C}^*)^{n-r} \subset U_{\sigma, N_1} \times \mathbb{C}^{n-r}.$$

Da $U_{\sigma, N}$ glatt ist, folgt nun, dass auch U_{σ, N_1} glatt sein muss (Check!). Nach dem oben diskutierten Fall ist σ also ein glatter Kegel in $(N_1)_{\mathbb{R}}$ und damit auch in $N_{\mathbb{R}} = (N_1)_{\mathbb{R}} \oplus (N_2)_{\mathbb{R}}$. \square

Definition 1.3.13. Seien S_1, S_2 affine Halbgruppen und $V_i = \text{Spec}(\mathbb{C}[S_i])$ die zugehörigen affinen torischen Varietäten. Ein Morphismus $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ heißt **torisch**, wenn der induzierte Homomorphismus $\varphi^*: \mathbb{C}[S_2] \rightarrow \mathbb{C}[S_1]$ durch einen Halbgruppenhomomorphismus $\widehat{\varphi}: S_2 \rightarrow S_1$ (durch lineare Ausdehnung) gegeben ist.

Proposition 1.3.14. *Es seien V_1, V_2 affine torische Varietäten mit Tori T_1, T_2 .*

- (a) *Ein Morphismus $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ ist genau dann torisch, wenn $\varphi(T_1) \subset T_2$ gilt und die Einschränkung $\varphi: T_1 \rightarrow T_2$ ein Gruppenhomomorphismus ist.*
- (b) *Ein torischer Morphismus ist äquivariant, das heißt für alle $t \in T_1$ und $p \in V_1$ gilt*

$$\varphi(t \cdot p) = \varphi(t) \cdot \varphi(p).$$

Beweis. Es sei $M_i = \mathbb{Z}S_i$ das Charaktergitter von T_{N_i} . Ein Halbgruppenhomomorphismus $\widehat{\varphi}: S_2 \rightarrow S_1$ setzt sich dann fort zu einem Homomorphismus $\widehat{\varphi}: M_2 \rightarrow M_1$ und wir erhalten ein kommutierendes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[S_2] & \xrightarrow{\varphi^*} & \mathbb{C}[S_1] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}[M_2] & \longrightarrow & \mathbb{C}[M_1]. \end{array}$$

Der Übergang zu den Varietäten zeigt direkt $\varphi(T_1) \subset T_2$. Außerdem sehen wir, dass $\varphi: T_1 \rightarrow T_2$ aufgrund der Identifikation $T_i = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M_i, \mathbb{C}^*)$ (Aufgabe 2) ein Gruppenhomomorphismus ist, nämlich gegeben durch $\alpha \mapsto \alpha \circ \widehat{\varphi}$ für $\alpha \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M_1, \mathbb{C}^*)$.

Ist umgekehrt $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ ein Morphismus, der auf einen Gruppenhomomorphismus $\varphi: T_1 \rightarrow T_2$ einschränkt, dann induziert das ein Diagramm wie oben, wobei die Abbildung $\mathbb{C}[M_2] \rightarrow \mathbb{C}[M_1]$ durch einen Gruppenhomomorphismus $\widehat{\varphi}: M_2 \rightarrow M_1$ induziert ist. Wegen $\varphi(\mathbb{C}[S_2]) \subset \varphi(\mathbb{C}[S_1])$ schränkt dieser auf einen Halbgruppenhomomorphismus $\widehat{\varphi}: S_2 \rightarrow S_1$ ein. Damit ist (a) bewiesen.

Für (b), sei $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ torisch und sei $\Phi_i: T_i \times V_i \rightarrow V_i$ die Operation des Torus. Äquivarianz bedeutet nun gerade, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_1 \times V_1 & \xrightarrow{\Phi_1} & V_1 \\ \downarrow \varphi \times \varphi & & \downarrow \varphi \\ T_2 \times V_2 & \xrightarrow{\Phi_2} & V_2 \end{array}$$

kommutiert. Dies ist offenbar, wenn man überall auf T_i einschränkt, da φ dann nach Voraussetzung ein Gruppenhomomorphismus ist und Φ_i eine Gruppenoperation. Da T_i in V_i Zariski-dicht ist, muss das Diagramm damit kommutieren. \square

Wir übersetzen die Aussage in polyedrische Kegel: Es seien $\sigma_i \subset (N_i)_{\mathbb{R}}$ spitze rationale polyedrische Kegel ($i = 1, 2$) und sei $\overline{\varphi}: N_1 \rightarrow N_2$ ein Homomorphismus von Gittern. Wegen $T_{N_i} = N_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$ (per Definition), induziert $\overline{\varphi}$ einen Homomorphismus $\varphi: T_{N_1} \rightarrow T_{N_2}$ durch $\sum a_i \otimes u_i \mapsto \sum a_i \otimes \overline{\varphi}(u_i)$. Analog gilt $(N_i)_{\mathbb{R}} = N_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, so dass $\overline{\varphi}$ auch zu einer Abbildung $\overline{\varphi}_{\mathbb{R}}: (N_1)_{\mathbb{R}} \rightarrow (N_2)_{\mathbb{R}}$ zwischen den umgebenden Vektorräumen fortsetzt.

Proposition 1.3.15. *Es seien $\sigma_i \subset (N_i)_{\mathbb{R}}$ spitze rationale polyedrische Kegel ($i = 1, 2$) und sei $\overline{\varphi}: N_1 \rightarrow N_2$ ein Homomorphismus von Gittern. Die induzierte Abbildung $\varphi: T_{N_1} \rightarrow T_{N_2}$ setzt sich genau dann zu einem torischen Morphismus $\varphi: U_{\sigma_1} \rightarrow U_{\sigma_2}$ fort, wenn $\overline{\varphi}_{\mathbb{R}}(\sigma_1) \subset \sigma_2$ gilt.*

Beweis. Zur Abbildung $\overline{\varphi}: N_1 \rightarrow N_2$ zwischen den Einparametergittern gehört eine duale Abbildung $\overline{\varphi}^*: M_2 \rightarrow M_1$ zwischen den Charaktergittern. Genau dann gilt $\overline{\varphi}_{\mathbb{R}}(\sigma_1) \subset \sigma_2$, wenn $\overline{\varphi}_{\mathbb{R}}^*(\sigma_2^{\vee}) \subset \sigma_1^{\vee}$ (denn für $u \in \sigma_1$ und $m \in \sigma_2^{\vee}$ gilt $\langle \overline{\varphi}_{\mathbb{R}}^* m, u \rangle = \langle m, \overline{\varphi}_{\mathbb{R}} u \rangle$). Dies wiederum ist genau dann der Fall, wenn $\overline{\varphi}^*$ zu einem Halbgruppenhomomorphismus $S_{\sigma_2} \rightarrow S_{\sigma_1}$ einschränkt. Nach 1.3.14 ist dies wiederum dazu äquivalent, dass $\varphi: T_{N_1} \rightarrow T_{N_2}$ zu einem torischen Morphismus $\varphi: U_{\sigma_1} \rightarrow U_{\sigma_2}$ fortsetzt. \square

Proposition 1.3.16. *Es sei σ ein spitzer rationaler polyedrischer Kegel in $N_{\mathbb{R}}$ und sei $\tau = H_m \cap \sigma$ für $m \in \sigma^\vee \cap M$ eine Seite von σ . Dann gilt*

$$\mathbb{C}[S_\tau] = \mathbb{C}[S_\sigma]_{\chi^m}.$$

Beweis. Wir zeigen, dass

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}m$$

gilt, woraus die Behauptung unmittelbar folgt. Aus der Inklusion $\tau \subset \sigma$ folgt nach Dualisieren $S_\sigma \subset S_\tau$. Da m auf τ verschwindet, gilt außerdem $\pm m \in \tau^\vee$ und damit $S_\sigma + \mathbb{Z}m \subset S_\tau$. Für die Umkehrung, sei $m' \in S_\tau$ und wähle $S \subset N$ endlich mit $\sigma = \text{Cone}(S)$. Setze

$$r = \max_{u \in S} \{|\langle m', u \rangle|\} \in \mathbb{N}.$$

Für alle $u \in \tau$ gilt dann $\langle m' + rm, u \rangle = \langle m', u \rangle \geq 0$ und für $u \in S$, $u \notin \tau$, gilt $\langle m, u \rangle > 0$ und damit ebenfalls $\langle m' + rm, u \rangle = \langle m', u \rangle + r\langle m, u \rangle > 0$. Also gilt $m' + rm \in S_\sigma$ und damit $m' \in S_\sigma + \mathbb{Z}m$. \square

In Verbindung mit 1.3.15 zeigt das: Die Identität $N \rightarrow N$ zusammen mit der Inklusion $\tau \subset \sigma$ induziert einen torischen Morphismus $U_\tau \rightarrow U_\sigma$, der der Inklusion $\mathbb{C}[S_\sigma] \subset \mathbb{C}[S_\tau]$ entspricht. Nach 1.3.16 entspricht U_τ der offenen Teilmenge $\{p \in U_\sigma \mid \chi^m p \neq 0\}$.

2. PROJEKTIVE TORISCHE VARIETÄTEN

2.0. Projektive Varietäten

Erinnerung an die Grundlagen: Wir schreiben \mathbb{P}^n für den komplexen projektiven Raum, die Menge aller Ursprungsgeraden in \mathbb{C}^{n+1} . Es ist eine Abbildung $\pi: \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$ durch $a \mapsto \mathbb{C}a$ gegeben. Für $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ schreiben wir $(a_0 : \dots : a_n)$ für den Punkt $\pi(a) \in \mathbb{P}^n$. Es gilt also $(a_0 : \dots : a_n) = (b_0 : \dots : b_n)$ genau dann, wenn es $\lambda \in \mathbb{C}^*$ gibt mit $(a_0, \dots, a_n) = \lambda \cdot (b_0, \dots, b_n)$.

Es gibt eine Korrespondenz zwischen abgeschlossenen Untervarietäten von \mathbb{P}^n und Idealen in $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$, die der im Affinen sehr ähnlich ist, nur dass alle Polynome und Ideale homogen sein müssen. Ein homogenes Polynom $f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ vom Grad d erfüllt $f(\lambda a) = \lambda^d f(a)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C}^{n+1}$. Für $p \in \mathbb{P}^n$ ist damit $f(p) = 0$ oder $f(p) \neq 0$ wohldefiniert, obwohl f nicht ohne weiteres als Funktion auf \mathbb{P}^n aufgefasst werden kann. Einem Ideal $I \subset \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ entspricht die projektive Nullstellenmenge

$$V_+(I) = \{p \in \mathbb{P}^n \mid \text{Für alle homogenen } f \in I \text{ gilt } f(p) = 0\}.$$

Eine **abgeschlossene Teilmenge** oder **projektive Untervarietät** von \mathbb{P}^n ist eine Menge der Form $V_+(I)$ für ein Ideal $I \subset \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$. Ein Ideal heißt **homogen**, wenn es von homogenen Polynomen erzeugt wird. Genau dann ist ein Ideal I homogen, wenn folgendes gilt: Ist $f = f_1 + \dots + f_d$, wobei f_i der homogene Teil vom Grad i von f ist, so ist $f \in I$ genau dann, wenn $f_1, \dots, f_d \in I$. Das Verschwindungsideal $\mathbf{I}(X)$ einer Teilmenge $X \subset \mathbb{P}^n$ ist homogen.

Aus einer homogenen Version des Nullstellensatzes erhält man eine inklusionsumkehrende Bijektion zwischen den abgeschlossenen Teilmengen von \mathbb{P}^n und den homogenen Radikalidealen von $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$, die nicht das irrelevante Ideal $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$ sind.

Ist $X \subset \mathbb{P}^n$ abgeschlossen und $\mathbf{I}(X) \subset \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ das Verschwindungsideal, so heißt die affine Varietät $V(\mathbf{I}(X)) \subset \mathbb{C}^{s+1}$ der **affine Kegels** über X und wird mit \widehat{X} bezeichnet. Es gilt $\widehat{X} = \pi^{-1}(X) \cup \{0\}$. Für die Dimensionen gilt immer $\dim(X) = \dim(\widehat{X}) - 1$.

2.1. Gitterpunkte und projektive torische Varietäten

Definition. Eine **torische Varietät** ist eine irreduzible Varietät V , die einen Torus T_N als Zariski-offene Teilmenge enthält, derart, dass sich die Operation von T_N auf sich zu einer algebraischen Operation $T_N \times V \rightarrow V$ fortsetzt.

Wir studieren nun projektive torische Varietäten. Zunächst ist \mathbb{P}^n selbst eine torische Varietät mit Torus

$$\begin{aligned} T_{\mathbb{P}^n} &= \mathbb{P}^n \setminus V(x_0 \cdots x_n) = \{(a_0 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n \mid a_0 \cdots a_n \neq 0\} \\ &= \{(1 : t_1 : \dots : t_n) \in \mathbb{P}^n \mid t_1 \cdots t_n \neq 0\} \cong (\mathbb{C}^*)^n. \end{aligned}$$

Ist $\pi: \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$ die Quotientenabbildung, so ist $T_{\mathbb{P}^n} = \pi((\mathbb{C}^*)^{n+1})$. Mit der Diagonalabbildung $\iota: \mathbb{C}^* \rightarrow (\mathbb{C}^*)^{n+1}$, $t \mapsto (t, \dots, t)$ ergibt sich eine kurze exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^* \xrightarrow{\iota} (\mathbb{C}^*)^{n+1} \xrightarrow{\pi} T_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow 1$$

Dies induziert exakte Sequenzen von Charakter- bzw. Einparametergittern

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow M_{T_{\mathbb{P}^n}} \xrightarrow{\widehat{\pi}} \mathbb{Z}^{n+1} \xrightarrow{\widetilde{\tau}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\widehat{\tau}^*} \mathbb{Z}^{n+1} \xrightarrow{\widehat{\pi}^*} N_{T_{\mathbb{P}^n}} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Dabei ist $\widehat{\tau}(a_0, \dots, a_n) = \sum_{i=0}^n a_i$ und $\widehat{\tau}^*(a) = (a, \dots, a)$. Daraus also

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n &:= M_{T_{\mathbb{P}^n}} = \left\{ (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n a_i = 0 \right\} \\ \mathcal{N}_n &:= N_{T_{\mathbb{P}^n}} = \mathbb{Z}^{n+1} / \mathbb{Z}(1, \dots, 1). \end{aligned}$$

Es sei T_N ein Torus mit Charaktergitter M . Wie im affinen können wir eine projektive torische Varietät aus jeder endlichen Teilmenge $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subset M$ basteln: Zu \mathcal{A} erhalten wir $\Phi_{\mathcal{A}}: T_N \rightarrow (\mathbb{C}^*)^s \subset \mathbb{C}^s \setminus \{0\}$ und können $\pi: \mathbb{C}^s \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^{s-1}$ dahinterschalten.

Definition. Für jede endliche Teilmenge $\mathcal{A} \subset M$ mit $|\mathcal{A}| = s$, sei $X_{\mathcal{A}}$ der Zariski-Abschluss des Bildes von $\pi \circ \Phi_{\mathcal{A}}$ in \mathbb{P}^{s-1} .

Mit anderen Worten, $X_{\mathcal{A}}$ ist der Zariski-Abschluss von

$$\{(\chi^{m_1}(t) : \dots : \chi^{m_s}(t)) \mid t \in T_N\} \subset \mathbb{P}^{s-1}.$$

Proposition 2.1.2. Die projektive Varietät $X_{\mathcal{A}}$ ist torisch mit Torus $\pi(\Phi_{\mathcal{A}}(T_N)) = X_{\mathcal{A}} \cap T_{\mathbb{P}^{s-1}}$.

Beweis. Analog zu 1.1.8. □

Sei L der Kern der Abbildung $\mathbb{Z}^s \rightarrow M$, $e_i \mapsto m_i$. Nach Prop. 1.1.9 ist das torische Ideal

$$I_L = \langle x^\alpha - x^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^s \text{ und } \alpha - \beta \in L \rangle$$

das Verschwindungsideal von $Y_{\mathcal{A}}$. Wann ist I_L auch das Verschwindungsideal von $X_{\mathcal{A}}$?

Proposition 2.1.3. Äquivalent sind:

- (a) Die torische Varietät $Y_{\mathcal{A}}$ ist der affine Kegel $\widehat{X}_{\mathcal{A}}$.
- (b) $I_L = \mathbf{I}(X_{\mathcal{A}})$.
- (c) I_L ist homogen.
- (d) Es gibt $u \in N$ mit

$$\langle m_1, u \rangle = \dots = \langle m_s, u \rangle > 0.$$

Mit anderen Worten, die Punkte in \mathcal{A} liegen in einer rationalen affinen Hyperebene, die nicht durch den Nullpunkt geht.

Beweis. Die Äquivalenz von (a) und (b) gilt wegen $\mathbf{I}(X_{\mathcal{A}}) = \mathbf{I}(\widehat{X}_{\mathcal{A}})$ und $\mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}}) = I_L$ nach Prop. 1.1.9. Die Implikation von (b) nach (c) ist klar, weil Verschwindungsideale projektiver Varietäten homogen sind. Beweise als nächstes (c) \Rightarrow (d): Sei I_L homogen und sei $\ell = \alpha - \beta \in L$ und damit $x^\alpha - x^\beta \in I_L$. Hätten x^α und x^β verschiedenen Grad, so müsste $x^\alpha, x^\beta \in$

$I_L = \mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}})$ gelten. Das ist aber unmöglich, wegen $(1, \dots, 1) \in Y_{\mathcal{A}}$. Also haben x^α und x^β denselben Grad. Es gilt also $(1, \dots, 1) \cdot \ell = \deg \alpha - \deg(\beta) = 0$. Betrachte die exakte Sequenz $0 \rightarrow L \rightarrow \mathbb{Z}^s \rightarrow M$. Nach Tensorieren mit \mathbb{Q} und Dualisieren wird das zu

$$N_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{Q}^s \longrightarrow \text{Hom}(L_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}) \longrightarrow 0.$$

Die vordere Abbildung ist dabei $N_{\mathbb{Q}} \ni \tilde{u} \mapsto (\langle m_1, \tilde{u} \rangle, \dots, \langle m_s, \tilde{u} \rangle)$. Wir haben außerdem gerade gesehen, dass $(1, \dots, 1) \in \mathbb{Q}^s$ hinten auf Null abgebildet wird. Wegen Exaktheit gibt es also $\tilde{u} \in N_{\mathbb{Q}}$ mit $\langle m_i, \tilde{u} \rangle = 1$ für $i = 1, \dots, s$. Bereinigen von Nennern liefert also $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ mit $u = k\tilde{u} \in N$ und $\langle m_i, u \rangle = k$ für $i = 1, \dots, s$.

Zeigen schließlich noch, dass (a) aus (d) folgt. Da $Y_{\mathcal{A}} \subset \widehat{X}_{\mathcal{A}}$ gilt und $X_{\mathcal{A}}$ irreduzibel ist, genügt es

$$\widehat{X}_{\mathcal{A}} \cap (\mathbb{C}^*)^s \subset Y_{\mathcal{A}}$$

zu beweisen. Sei also $p \in \widehat{X}_{\mathcal{A}} \cap (\mathbb{C}^*)^s$. Da $X_{\mathcal{A}} \cap T_{\mathbb{P}^n}$ der Torus von $X_{\mathcal{A}}$ ist, gibt es $\mu \in \mathbb{C}^*$ und $t \in T_N$ mit

$$p = \mu \cdot (\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_s}(t))$$

Sei nun $u \in N$ mit $\langle m_i, u \rangle = k$ für alle i und betrachte die Einparametergruppe $\lambda_u: \mathbb{C}^* \rightarrow T_N$. Für $\tau \in \mathbb{C}^*$ gilt dann

$$\begin{aligned} \lambda^u(\tau)t &= (\chi^{m_1}(\lambda^u(\tau)t), \dots, \chi^{m_s}(\lambda^u(\tau)t)) \\ &= (\tau^{\langle m_1, u \rangle} \chi^{m_1}(t), \dots, \tau^{\langle m_s, u \rangle} \chi^{m_s}(t)) \\ &= \tau^k (\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_s}(t)). \end{aligned}$$

Wegen $k > 0$ können wir also τ so wählen, dass $p = \lambda^u(\tau)t \in Y_{\mathcal{A}}$ gilt, wie gewünscht. \square

Bemerkung. Beachte im Beweis, dass die exakte Sequenz $0 \rightarrow L \rightarrow \mathbb{Z}^s \rightarrow M$ im allgemeinen nicht zu einer exakten Sequenz $N \rightarrow \mathbb{Z}^s \rightarrow \text{Hom}(L, \mathbb{Z}) \rightarrow 0$ dualisiert, obwohl alle beteiligten \mathbb{Z} -Modulen frei sind. Das passt damit zusammen, dass man k in (d) im allgemeinen nicht gleich 1 wählen kann.

Beispiel 2.1.4. (a) Wir betrachten den rationalen Normalenkegel $\widehat{C}_d \subset \mathbb{C}^{d+1}$ (vgl. Beispiel 1.3.7). Dazu bestehe $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^2$ aus den Spalten der $2 \times (d+1)$ -Matrix

$$A = \begin{bmatrix} d & d-1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & d-1 & d \end{bmatrix}.$$

Das Ideal von \widehat{C}_d ist das homogene Ideal, das wir schon in Beispiel 1.3.7. bestimmt haben. Die Homogenität zeigt sich darin, dass alle Punkte in \mathcal{A} auf der affinen Geraden $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a + b = d\}$ liegen.

Die zugehörige projektive Varietät $C_d = X_{\mathcal{A}}$ ist ein-dimensional und heißt die **rationale Normalenkurve**.

Betrachte andererseits $\mathcal{B} = \{0, 1, \dots, d-1, d\} \subset \mathbb{Z}$. Dazu gehört die Abbildung

$$\Phi_{\mathcal{B}}: \begin{cases} \mathbb{C}^* & \rightarrow & \mathbb{P}^d \\ t & \mapsto & (1, t, \dots, t^{d-1}, t^d) \end{cases}.$$

Die zugehörige projektive Varietät ist ebenfalls die rationale Normalenkurve, d.h. es gilt $X_B = C_d$. Aber die affine Varietät Y_B ist natürlich nicht der rationale Normalenkegel, denn sie hat ebenfalls Dimension 1 statt 2. Das Ideal $\mathbf{I}(Y_B)$ ist auch nicht homogen, da z.B. $x_1^2 - x_2^2$ auf allen Punkten $(1, t, \dots, t^d) \in \mathbb{C}^{d+1}$ und damit auf Y_B verschwindet. Also $x_1^2 - x_2^2 \in \mathbf{I}(Y_B)$, aber $x_1^2, x_2^2 \notin \mathbf{I}(Y_B)$.

Das Problem in diesem Beispiel lässt sich leicht reparieren. Ist $\mathcal{A} \subset M$ eine endliche Teilmenge, so betrachte $\mathcal{A} \times \{1\} \subset M \oplus \mathbb{Z}$. Dazu gehört der Torus $T_N \times \mathbb{C}^*$ und es gilt

$$\Phi_{\mathcal{A} \times \{1\}}(t, \mu) = (\chi^{m_1}(t)\mu, \dots, \chi^{m_s}(t)\mu) = \mu \cdot (\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_s}(t)).$$

Daraus folgt sofort $X_{\mathcal{A} \times \{1\}} = X_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{P}^{s-1}$. Da $\mathcal{A} \times \{1\}$ in der affinen Hyperebene $M \times \{1\}$ enthalten ist, sind die Voraussetzungen von 2.1.4. erfüllt, so dass $\widehat{X}_{\mathcal{A}} = Y_{\mathcal{A} \times \{1\}}$ gilt. In dieser Weise kann man also sozusagen die Gitterpunkte homogenisieren.

Als nächstes bestimmen wir den Torus von $X_{\mathcal{A}}$ über sein Charaktergitter. Für $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subset M$, sei

$$\mathbb{Z}'\mathcal{A} = \left\{ \sum_{i=1}^r a_i m_i \mid a_i \in \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^s a_i = 0 \right\}.$$

Der Rang von $\mathbb{Z}'\mathcal{A}$ ist genau die Dimension von $\text{Aff}(\mathcal{A}) = \{ \sum_{i=1}^r \mu_i m_i \mid \sum_{i=1}^r \mu_i = 1 \}$, der von \mathcal{A} erzeugte affine Unterraum. Denn es gilt etwa $\text{Aff}(\mathcal{A}) - m_1 = \{ \sum_{i=1}^r \mu_i m_i \mid \sum_{i=1}^r \mu_i = 0 \}$ und dies ist damit gerade $\text{Span}(\mathbb{Z}'\mathcal{A})$. Nach dem Lemma vor 1.2.18 gilt also $\text{rk } \mathbb{Z}'\mathcal{A} = \dim(\text{Aff}(\mathcal{A}) - m_1) = \dim(\text{Aff}(\mathcal{A}))$. (Bild!)

Proposition 2.1.5.

- (a) Das Charaktergitter von $X_{\mathcal{A}}$ ist $\mathbb{Z}'\mathcal{A}$.
- (b) Die Dimension von $X_{\mathcal{A}}$ ist die Dimension des von \mathcal{A} aufgespannten affinen Unterraums. Insbesondere gilt

$$\dim X_{\mathcal{A}} = \text{rk } \mathbb{Z}'\mathcal{A} = \begin{cases} \text{rk } \mathbb{Z}\mathcal{A} - 1 & \text{falls } 0 \notin \text{Aff}(\mathcal{A}) \\ \text{rk } \mathbb{Z}\mathcal{A} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. (a) Sei M' das Charaktergitter von $T_{X_{\mathcal{A}}}$. Betrachte das kommutierende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_N & \longrightarrow & T_{\mathbb{P}^{s-1}} \\ & \searrow & \uparrow \\ & & T_{X_{\mathcal{A}}} \end{array}$$

Übergang zu den Charaktergittern ergibt

$$\begin{array}{ccc} M & \longleftarrow & \mathcal{M}_{s-1} \\ & \swarrow & \downarrow \\ & & M' \end{array}$$

Die Abbildung $\mathcal{M}_{s-1} \rightarrow M$ ist die Einschränkung der Abbildung $\mathbb{Z}^s \rightarrow M$, $e_i \rightarrow m_i$, auf $\mathcal{M}_{s-1} = \{a \in \mathbb{Z}^s \mid \sum_{i=1}^s a_i = 0\}$. Also ist $\mathbb{Z}'\mathcal{A}$ das Bild von $\mathcal{M}_{s-1} \rightarrow M$ und damit gleich M' .

(b) Die Dimension von $X_{\mathcal{A}}$ ist der Rang des Charaktergitters $\mathbb{Z}'\mathcal{A}$ und damit nach der vorangehenden Bemerkung gleich $\dim(\text{Aff}(\mathcal{A}))$. Andererseits gilt $\text{rk } \mathbb{Z}\mathcal{A} = \dim \text{span}(\mathcal{A})$, und es ist $\dim \text{span}(\mathcal{A}) = \dim \text{Aff}(\mathcal{A})$ genau dann, wenn $0 \in \text{Aff}(\mathcal{A})$, andernfalls gilt $\dim \text{Aff}(\mathcal{A}) = \dim \text{span}(\mathcal{A}) - 1$. \square

Es gibt immer zwei Sichtweisen auf projektive Varietäten: Die **globale** in homogenen Koordinaten, die wir jetzt betrachtet haben, und die **lokale**, über affine Überdeckungen. Die betrachten wir jetzt, was die Halbgruppen zurück ins Spiel bringen wird.

Der projektive Raum \mathbb{P}^n wird überdeckt durch die **affinen Karten** $U_i = \mathbb{P}^{s-1} \setminus \mathbf{V}(x_i)$. Jedes U_i ist tatsächlich ein affiner Raum, denn jeder Punkt von U_i hat einen eindeutigen Repräsentant $(a_0 : \dots : 1 : \dots : a_n)$ mit einer 1 an der i -ten Stelle, und entspricht damit dem Punkt $(a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. Jede offene Teilmenge U_i enthält den Torus $T_{\mathbb{P}^n}$.

Ist $X_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{P}^{s-1}$ die zu $\mathcal{A} \subset M$ gehörende projektive torische Varietät, sind auch die $X_{\mathcal{A}} \cap U_i$ torische Varietäten. Denn $X_{\mathcal{A}}$ ist der Zariski-Abschluss von $T_{X_{\mathcal{A}}} \subset T_{\mathbb{P}^{s-1}}$. Also ist auch $X_{\mathcal{A}} \cap U_i$ der Zariski-Abschluss von $T_{X_{\mathcal{A}}}$ in $U_i \cong \mathbb{C}^{s-1}$. Genauer gesagt gilt:

Proposition 2.1.6. *Es gilt*

$$X_{\mathcal{A}} \cap U_i = Y_{\mathcal{A}_i} = \text{Spec}(\mathbb{C}[S_i])$$

wobei $\mathcal{A}_i = \{m_j - m_i \mid i \neq j\}$ und $S_i = \mathbb{N}\mathcal{A}_i$.

Beweis. Die Identifikation $U_i \cong \mathbb{C}^{s-1}$ ist gegeben durch die Abbildung $(a_1 : \dots : a_s) \mapsto (a_1/a_i, \dots, a_{i-1}/a_i, a_{i+1}/a_i, \dots, a_s/a_i)$. Wegen $\chi^{m_j}/\chi^{m_i} = \chi^{m_j - m_i}$ sieht man daraus, dass $X_{\mathcal{A}} \cap U_i$ der Zariski-Abschluss des Bildes von

$$\left\{ \begin{array}{l} T_N \rightarrow \mathbb{C}^{s-1} \cong U_i \\ t \mapsto (\chi^{m_1 - m_i}(t), \dots, \chi^{m_{i-1} - m_i}(t), \chi^{m_{i+1} - m_i}(t), \dots, \chi^{m_s - m_i}(t)) \end{array} \right.$$

ist. Daraus die Behauptung. \square

2.2. Polytope und Gitterpunkte

Affine torische Varietäten hängen, wie gesehen, eng mit Gitterpunkten in polyedrischen Kegeln zusammen. Bei projektiven Varietäten möchte man die Gitterpunkte alle in einer affinen Hyperebene versammelt haben. Deshalb geht man von einer endlichen Teilmenge $\mathcal{A} \subset M$ nicht zum erzeugten Kegel $\text{Cone}(\mathcal{A})$, sondern zur konvexen Hülle $\text{Conv}(\mathcal{A})$ über. Wir brauchen erst mal wieder einiges über Polytope aus der Konvexgeometrie. Ein **Polytop** ist die konvexe Hülle einer endlichen Teilmenge $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subset M_{\mathbb{R}}$, also

$$\text{Conv}(\mathcal{A}) = \left\{ \sum_{i=1}^s a_i m_i \mid a_i \geq 0 \text{ und } \sum_{i=1}^s a_i = 1 \right\}.$$

Die **Dimension** eines Polytops ist die Dimension des von P aufgespannten affinen Unterraums. Zu $b \in \mathbb{R}$ und $u \in N_{\mathbb{R}}$, betrachte

$$H_{u,b} = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u \rangle = b\} \quad \text{und} \quad H_{u,b}^+ = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u \rangle \geq b\}$$

die durch u und b bestimmte **affine Hyperebene** bzw. der **abgeschlossene Halbraum**. Eine Seite $Q < P$ ist eine Teilmenge der Form

$$Q = H_{u,b} \cap P \quad \text{mit} \quad P \subset H_{u,b}^+$$

für $u \in N_{\mathbb{R}}$ und $b \in \mathbb{R}$. In diesem Fall heißt $H_{u,b}$ eine **affine Stützhyperebene**. Seiten der Dimension 0, 1, $\dim(P) - 1$ heißen **Ecken** bzw. **Kanten** bzw. **Facetten**.

Wir verwenden ohne Beweis die folgenden grundlegenden Tatsachen über Polytope.

Proposition 2.2.1. *Es sei $P \subset M_{\mathbb{R}}$ ein Polytop.*

- (a) P ist die konvexe Hülle seiner Ecken. Genauer ist jeder Punkt von P eine Konvexkombination von höchstens $\dim P + 1$ Ecken (Satz von Carathéodory).
- (b) Falls $P = \text{Cone}(S)$, so liegt jede Ecke von P in S .
- (c) Ist $Q < P$, so sind die Seiten von Q genau die Seiten von P , die in Q enthalten sind.
- (d) Jede echte Seite von P ist der Durchschnitt aller Facetten, in denen sie enthalten ist. \square

Ein **Polyeder** ist ein endlicher Durchschnitt von Halbräumen, also eine Menge P der Form

$$P = \bigcap_{i=1}^s H_{u_i, b_i}$$

für $u_i \in N_{\mathbb{R}}$ und $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, s$.

Satz. *Die Polytope sind genau die kompakten Polyeder.* \square

Der Beweis geht völlig analog zu der entsprechenden Aussage über Kegel, nämlich dass die endlich-erzeugten Kegel genau die polyedrischen sind. (Man kann die Aussage über Polytope auch daraus folgern.)

Ist $P \subset M_{\mathbb{R}}$ volldimensional (also $\text{int}(P) \neq \emptyset$) und ist $F < P$ eine Facette, so wird F durch eine eindeutige affine Hyperebene ausgeschnitten. D.h. es gibt ein bis auf einen positiven Faktor eindeutiges Paar $(u_F, a_F) \in N_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$ derart, dass $H_F = H_{u_F, -a_F}$ eine affine Stützhyperebene mit $F = P \cap H_F$ und $P \subset H_F^+ = H_{u_F, -a_F}^+$ ist. Wir nennen u_F eine **nach innen gerichtete Facettennormale** (Bild!) von F . Es gilt

$$P = \bigcap_{F \text{ Facette von } P} H_F^+ = \left\{ m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u_F \rangle \geq -a_F \text{ für alle Facetten } F < P \right\}.$$

Definition. Es sei $P \subset M_{\mathbb{R}}$ ein Polytop der Dimension d .

- (a) P ist ein **d -Simplex**, wenn es genau $d + 1$ Ecken besitzt.
- (b) P ist **simplicial**, wenn alle seine Facetten $d - 1$ -Simplexe sind.
- (c) P heißt **einfach**, wenn jede Ecke von P in genau d Facetten enthalten ist.

Beispiel. Die klassischen platonischen Körper in \mathbb{R}^3 teilen sich demnach wie folgt auf:

- (1) Ein Tetraeder ist ein 3-Simplex.
- (2) Oktaeder und Ikosaeder sind simplicial, denn ihre Seitenflächen sind Dreiecke.
- (3) Würfel und Dodekaeder sind einfach, da sich je drei Facetten in einer gemeinsamen Ecke berühren.

Definition. Zwei Polytope P_1 und P_2 heißen **kombinatorisch äquivalent**, wenn es eine Bijektion zwischen den Seiten von P_1 und P_2 gibt, die Dimensionen, Durchschnitte und die Relation $<$ erhält. (D.h., es gibt einen Isomorphismus zwischen den Seitenverbänden.)

Beispiel. Alle d -Simplizes sind kombinatorisch äquivalent (sogar affin-linear isomorph). Zwei Polygone in der Ebene sind genau dann kombinatorisch äquivalent, wenn sie gleich viele Ecken haben. (Sie sind dann aber nicht unbedingt affin-linear isomorph).

Die **Minkowski-Summe** zweier Teilmengen $A_1, A_2 \subset M_{\mathbb{R}}$ ist

$$A_1 + A_2 = \{m_1 + m_2 \mid m_1 \in A_1, m_2 \in A_2\}.$$

Die Minkowski-Summe zweier Polytope ist wieder ein Polytop.

Die Dualität geht bei allgemeinen konvexen Mengen so. Ist $C \subset M_{\mathbb{R}}$ eine konvexe Menge mit nicht-leerem Innern und $0 \in \text{int}(C)$, so heißt

$$C^\circ = \{u \in N_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u \rangle \geq -1 \text{ für alle } m \in C\} \subset N_{\mathbb{R}}$$

das **Dual** von C . (Ist C ein Kegel, so gilt $C^\circ = C^\vee$). (Bild!) Wie für Kegel gilt:

Satz (Bidualität). *Ist $C \subset M_{\mathbb{R}}$ abgeschlossen und konvex mit $0 \in \text{int}(C)$, so gilt $(C^\circ)^\circ = C$.*

Als nächstes müssen wir uns wieder um Gitterpunkte kümmern. Seien wie üblich M und N duale Gitter mit zugehörigen reellen Vektorräumen $M_{\mathbb{R}}$ und $N_{\mathbb{R}}$. Ein **Gitterpolytop** in $M_{\mathbb{R}}$ ist die konvexe Hülle einer endlichen Teilmenge von M .

Genau dann ist ein Polytop ein Gitterpolytop, wenn alle seine Ecken Gitterpunkte sind (Check!). Daraus folgt leicht, dass alle Seiten eines Gitterpolytops sind wieder Gitterpolytope sind. Minkowski-Summen von Gitterpolytopen sind ebenfalls wieder Gitterpolytope.

Es sei P ein volldimensionales Gitterpolytop und F eine Facette. Die nach innen gerichteten Facettennormalen von F liegen auf einem eindeutig bestimmten Halbstrahl in $N_{\mathbb{R}}$. Den eindeutig bestimmten Halbstahlerzeuger bezeichnen wir mit u_F . Die zugehörige Zahl a_F mit $H_F = H_{u_F, -a_F}$ und $P \subset H_{u_F, -a_F}^+$ ist ganzzahlig, denn es gilt $\langle m, u_F \rangle = -a_F$ für jede Ecke $m \in M$ von F . Daraus folgt

$$P = \bigcap_{F \text{ Facette von } P} H_{u_F, -a_F}^+ = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u_F \rangle \geq -a_F \text{ für alle Facetten } F < P\}.$$

Die Facettenbeschreibung des Gitterpolytops P in dieser speziellen Form ist eindeutig.

Beispiel 2.2.6. Es sei $P = \text{Conv}(\pm e_1 \pm e_2) \subset \mathbb{R}^2$ das Einheitsquadrat. Die Facettennormalen von P sind $\pm e_1$ und $\pm e_2$ und die Facettendarstellung von P ist gegeben durch

$$P = H_{e_1, -1}^+ \cap H_{-e_1, -1}^+ \cap H_{e_2, -1}^+ \cap H_{-e_2, -1}^+.$$

Es folgt außerdem, dass $P^\circ = \text{Conv}(\pm e_1, \pm e_2)$ ebenfalls ein Gitterpolytop ist.

Beispiel 2.2.7. Tatsächlich ist das Dual eines Gitterpolytops aber in der Regel kein Gitterpolytop. Das liegt daran, dass z.B. das Dual von kP für $k > 0$ gerade $\frac{1}{k}P^\circ$ ist.

Bemerkung. Man könnte meinen, dass man bei jedem Polytop die Eckpunkte so verschieben kann (evtl. nach Streckung mit einer Konstanten), dass ein kombinatorisch äquivalentes Gitterpolytop entsteht. Das ist aber nicht wahr. Es gibt Polytope, die zu keinem Gitterpolytop kombinatorisch äquivalent sind, und zwar in jeder Dimension ≥ 8 (Ziegler?)

Wie kommt man jetzt von einem Gitterpolytop zu einer torischen Varietät? Die erste Antwort ist naheliegend: Ist $P \subset M_{\mathbb{R}}$ ein Gitterpolytop, so betrachte dazu die projektive torische Varietät $X_{P \cap M}$. Im Unterschied zum Affinen reicht das aber noch nicht, um eine vernünftige Korrespondenz hinzubekommen.

Beispiel. Es sei $P = \text{Conv}(0, e_1, e_2, e_3)$ das dreidimensionale Standard-Simplex in \mathbb{R}^3 und $Q = \text{Conv}(0, e_1, e_2, e_1 + e_2 + 3e_3)$ ein anderes 3-Simplex (siehe Aufgabe 17). Beide enthalten nur vier Gitterpunkte, nämlich die Ecken. Für die zugehörigen torischen Varietäten gilt einfach $X_{P \cap \mathbb{Z}^3} = X_{Q \cap \mathbb{Z}^3} = \mathbb{P}^3$. Das ist nicht so recht zufriedenstellend, denn als Gitterpolytope sind P und Q ziemlich verschieden. Zum Beispiel bilden die von Null verschiedenen Eckpunkte von P eine Gitterbasis, die von Q dagegen nicht.

Definition 2.2.9. Ein Gitterpolytop heißt **normal**, wenn

$$(kP) \cap M + (\ell P) \cap M = ((k + \ell)P) \cap M$$

für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$ gilt.

Beachte zunächst, dass die Inklusion von links nach rechts immer erfüllt ist. Denn für $x, y \in P$ gilt $kx + \ell y = (k + \ell) \left(\frac{k}{k + \ell} x + \frac{\ell}{k + \ell} y \right) \in (k + \ell)P$. Der Punkt ist, dass alle Gitterpunkte des gestreckten Polytops $(k + \ell)P$ als Summen von Gitterpunkten von kP und ℓP geschrieben werden können. Äquivalent ist offenbar, dass

$$\underbrace{P \cap M + \dots + P \cap M}_{k\text{-mal}} = (kP) \cap M$$

für alle $k \geq 1$ gilt.

Beispiel. Das 3-Simplex Q im vorangehenden Beispiel ist nicht normal. Denn seine Eckpunkte sind die einzigen Gitterpunkte. Daraus sieht man leicht, dass

$$e_1 + e_2 + e_3 = \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 2e_1 + \frac{1}{3} \cdot 2e_2 + \frac{1}{6} \cdot (2e_1 + 2e_2 + 6e_3) \in 2P$$

nicht die Summe von Gitterpunkten in Q ist. Also ist Q nicht normal.

Beispiel. Jedes 1-dimensionale Gitterpolytop ist normal (Übung!).

Der Hauptsatz über normale Polytope ist die folgende Aussage.

Satz 2.2.12. *Es sei $n = \dim M_{\mathbb{R}}$ und sei $P \subset M_{\mathbb{R}}$ ein volldimensionales Gitterpolytop. Dann ist kP normal für alle $k \geq n - 1$.*

Beweis. Dieser Satz wurde wohl in verschiedenen Formen seit den 1990er Jahren mehrfach bewiesen. Zuerst explizit formuliert von Bruns, Gubeladze und Trung (1997).

Um zu zeigen, dass kP für $k \geq n - 1$ normal ist, beweisen wir

$$(*) \quad (kP) \cap M + P \cap M = ((k+1)P) \cap M$$

für alle $k \geq n - 1$. (Dies impliziert tatsächlich, dass kP normal ist für $k \geq n - 1$; Check!) Dabei ist die Inklusion von links nach rechts wieder klar.

Betrachten zunächst den Fall, dass P ein Simplex ohne innere Gitterpunkte ist, d.h. es gelte $P = \text{Conv}(m_0, \dots, m_n)$ für $m_0, \dots, m_n \in M$ und $\text{int}(P) \cap M = \emptyset$. Dann hat $(k+1)P$ die Eckpunkte $(k+1)m_0, \dots, (k+1)m_n$ und ein Punkt $m \in ((k+1)P) \cap M$ kann geschrieben werden als Konvexkombination

$$m = \sum_{i=0}^n \mu_i (k+1)m_i \quad \text{mit} \quad \mu_i \geq 0, \sum_{i=0}^n \mu_i = 1.$$

Setze $\lambda_i = (k+1)\mu_i$, dann gilt

$$m = \sum_{i=0}^n \lambda_i m_i \quad \text{mit} \quad \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^n \lambda_i = k+1.$$

Falls $\lambda_i \geq 1$ für ein i gilt, so folgt

$$m - m_i = k \left(\sum_{j \neq i} \frac{\lambda_j}{k} m_j + \frac{\lambda_i - 1}{k} m_i \right) \in (kP) \cap M,$$

also $m \in (kP) \cap M + P \cap M$. Gelte also $\lambda_i < 1$ für alle i . Wegen $k \geq n - 1$ ist dann

$$n \leq k+1 = \sum_{i=0}^n \lambda_i < n+1$$

und damit $k = n - 1$ und $\sum_{i=0}^n \lambda_i = n$. Betrachte

$$\tilde{m} = (m_0 + \dots + m_n) - m = \sum_{i=0}^n (1 - \lambda_i) m_i.$$

Es gilt $0 < 1 - \lambda_i < 1$ und $\sum_{i=0}^n (1 - \lambda_i) = (n+1) - n = 1$ und damit $\tilde{m} \in \text{int}(P) \cap M$. Das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass P keine inneren Gitterpunkte besitzt.

Beweisen nun den allgemeinen Fall. Wir reduzieren auf den bereits bewiesenen Fall indem wir P als endliche Vereinigung von n -dimensionalen Gitter-Simplizes ohne innere Gitterpunkte schreiben. (Bild!) Daraus folgt dann, dass $(*)$ auch für P gilt. Sei dazu $P = \text{Conv}(\mathcal{A})$ für $\mathcal{A} \subset M$. Nach dem Satz von Carathéodory ist jeder Punkt in P die Konvexkombination von höchstens $n+1$ affin-unabhängigen Punkten aus \mathcal{A} . Mit anderen Worten, es gilt $P = \bigcup \text{Conv}(\mathcal{B})$, wobei \mathcal{B} über alle Teilmengen $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ von $n+1$ affin-unabhängigen Punkten läuft. Jedes $\text{Conv}(\mathcal{B})$ ist ein Gitter-Simplex.

Es sei nun $\mathcal{B} = \{w_0, \dots, w_n\}$ und angenommen $Q = \text{Conv}(\mathcal{B})$ hat einen inneren Gitterpunkt $v \in \text{int}(Q) \cap M$. Dann zerlegen wir Q weiter durch

$$Q = \bigcup_{i=0}^n Q_i \quad Q_i = \text{Conv}(w_0, \dots, w_{i-1}, w_{i+1}, \dots, w_n, v).$$

Da v ein innerer Punkt ist, sind die Q_i wieder n -dimensionale Simplizes. Außerdem ist jeder innere Gitterpunkt von Q_i auch ein innerer Gitterpunkt von Q , während v kein innerer

Punkt von irgendeinem Q_i ist. Also haben die Q_i weniger innere Gitterpunkte als Q . Durch Induktion über die Anzahl der inneren Gitterpunkte erhalten wir also die gewünschte Darstellung von P als Vereinigung von Gittersimplizes ohne innere Gitterpunkte. \square

Korollar 2.2.13. *Jedes Gitterpolytop in \mathbb{R}^2 (=Gitterpolygon) ist normal.* \square

Im weiteren brauchen wir statt Normalität allerdings meistens das folgende:

Definition. Ein Gitterpolytop $P \subset M_{\mathbb{R}}$ heißt **sehr ampel**, wenn folgendes gilt: Für jede Ecke $m_0 \in P$ ist die Halbgruppe

$$S_{P,m_0} = \mathbb{N}(P \cap M - m_0) = \left\{ \sum_{m \in P \cap M} a_m (m - m_0) \mid a_m \in \mathbb{N}, \text{ nur endlich viele } \neq 0 \right\}$$

saturiert in M .

Proposition 2.2.18. *Ein normales Gitterpolytop ist sehr ampel.*

Beweis. Es sei P ein normales Gitterpolytop und sei $m_0 \in P$ eine Ecke. Sei $m \in M$ und $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ mit $km \in S_{P,m_0}$. Wir müssen $m \in S_{P,m_0}$ zeigen. Schreibe dazu

$$km = \sum_{m' \in P \cap M} a_{m'} (m' - m_0)$$

mit $a_{m'} \in \mathbb{N}$. Wähle $d \in \mathbb{N}$ mit $kd \geq \sum_{m' \in P \cap M} a_{m'}$, dann gilt

$$km + kdm_0 = \sum_{m' \in P \cap M} a_{m'} m' + (kd - \sum_{m' \in P \cap M} a_{m'}) m_0 \in kdP.$$

Nach Teilen durch k folgt $m + dm_0 \in dP$. Da P normal ist, gibt es $m_1, \dots, m_d \in P \cap M$ mit

$$m + dm_0 = \sum_{i=1}^d m_i.$$

Daraus folgt $m = \sum_{i=1}^d (m_i - m_0) \in S_{P,m_0}$, wie behauptet. \square

Die Umkehrung dieser Aussage ist nicht richtig. Siehe dazu [CLS, Beispiel 2.2.20].

Beispiel. Das Polytop $Q = \text{Conv}(0, e_1, e_2, e_1 + e_2 + 3e_3)$, das nicht normal ist, ist auch nicht sehr ampel. Denn für $m_0 = 0$ ist $3(e_1 + e_2 + e_3) = 2e_1 + 2e_2 + (e_1 + e_2 + 3e_3) \in S_{P,m_0}$, aber $e_1 + e_2 + e_3 \notin S_{P,m_0}$.

2.3. Polytope und projektive torische Varietäten

Es sei P zunächst ein Gitterpolytop bezüglich eines Gitters M . Es sei $P \cap M = \{m_1, \dots, m_s\}$ und $X_{P \cap M} \subset \mathbb{P}^{s-1}$ die zugehörige projektive torische Varietät. Für jedes $1 \leq i \leq s$ betrachten wir die Halbgruppe

$$S_i = S_{P,m_i} = \mathbb{N}(P \cap M - m_i)$$

die von allen $m_j - m_i$ erzeugt wird. Betrachten in \mathbb{P}^{s-1} die affin-offene Teilmenge $U_i = \mathbb{P}^{s-1} \setminus \mathbf{V}(x_i) \cong \mathbb{C}^{s-1}$. Wir haben bewiesen (Prop. 2.1.8), dass

$$X_{P \cap M} \cap U_i \cong \text{Spec}(\mathbb{C}[S_i]).$$

Es gilt außerdem

Lemma. Sei $J = \{i \mid m_i \text{ ist eine Ecke von } P\}$. Dann gilt

$$X_{P \cap M} = \bigcup_{j \in J} X_{P \cap M} \cap U_j.$$

Beweis. Beachte zunächst, dass $(X_{P \cap M} \cap U_i) \cap U_j$ für alle $i, j \in \{1, \dots, s\}$ genau aus den Punkten von $X_{P \cap M} \cap U_i$ besteht, in denen die Funktion x_j/x_i auf U_i nicht verschwindet. Im Koordinatenring $\mathbb{C}[X_{P \cap M} \cap U_i] = \mathbb{C}[S_i]$ entspricht dies der Funktion $\chi^{m_j - m_i}$. Es gilt also

$$(X_{P \cap M} \cap U_i) \cap U_j = \text{Spec}(\mathbb{C}[S_i]_{\chi^{m_j - m_i}}).$$

Sei nun $i \in \{1, \dots, s\}$. Da m_i eine Konvexkombination der Ecken ist, gibt es $r_j \in \mathbb{Q}$ mit $0 \leq r_j \leq 1$, $\sum_{j \in J} r_j = 1$ mit $m_i = \sum_{j \in J} r_j m_j$. (Dass wir die r_j wirklich rational wählen können, folgt aus einem ähnlichen Argument wie in Aufgabe 14.) Nach Bereinigen von Nennern erhalten wir also ganze Zahlen $k > 0$ und $k_j \geq 0$ mit

$$k m_i = \sum_{j \in J} k_j m_j, \quad \sum_{j \in J} k_j = k.$$

Also gilt $\sum_{j \in J} k_j (m_j - m_i) = 0$. Damit hat $m_j - m_i$ in S_i ein additives Inverses, falls $k_j > 0$ gilt. Für jedes solche j ist also $m_i - m_j \in S_i$. Dann ist also $\chi^{m_j - m_i}$ eine Einheit in $\mathbb{C}[S_i]$ und damit $\mathbb{C}[S_i]_{\chi^{m_j - m_i}} = \mathbb{C}[S_i]$ (d.h. in der Lokalisierung kommt nichts dazu). Es gilt also $X_{P \cap M} \cap U_i \cap U_j = X_{P \cap M} \cap U_i$ und damit $X_{P \cap M} \cap U_i \subset X_{P \cap M} \cap U_j$. Da die U_i für $i = 1, \dots, s$ den ganzen \mathbb{P}^{s-1} überdecken, folgt daraus die Behauptung. \square

Satz 2.3.1. Es sei T_N ein Torus mit Charaktergitter M und sei P ein sehr amples volldimensionales Gitterpolytop in $M_{\mathbb{R}}$. Sei $X_{P \cap M}$ die zugehörige projektive torische Varietät.

(a) Für jede Ecke $m_i \in P \cap M$ sei

$$\sigma_i = \text{Cone}(P \cap M - m_i)^\vee.$$

Dann gilt

$$X_{P \cap M} \cap U_i = U_{\sigma_i} = \text{Spec}(\mathbb{C}[\sigma_i^\vee \cap M]).$$

Ferner gilt $\dim \sigma_i = \dim P$.

(b) Der Torus von $X_{P \cap M}$ hat Charaktergitter M und ist damit gerade T_N .

Beweis. Es sei $C_i = \text{Cone}(P \cap M - m_i)$. Da m_i eine Ecke von P ist, ist 0 eine Ecke des Kegels C_i , so dass C_i spitz ist. Außerdem gilt $\dim(C_i) = \dim(P)$ (Übung!). Also ist C_i ein spitzer Kegel mit nicht-leerem Inneren und damit auch $\sigma_i = C_i^\vee$.

Ferner gilt $S_i \subset C_i \cap M = \sigma_i^\vee \cap M$. Nach Voraussetzung ist P sehr ampel und damit S_i saturiert in M . Deshalb folgt $S_i = \sigma_i^\vee \cap M$ nach Aufgabe 14. Damit ist (a) bewiesen.

Zu (b): Nach Satz 1.2.18 ist T_N der Torus von U_{σ_i} , da σ_i spitz ist. Wegen $T_N \subset U_{\sigma_i} = X_{P \cap M} \cap U_i \subset X_{P \cap M}$ ist T_N damit auch der Torus von $X_{P \cap M}$. \square

Als nächstes studieren wir systematischer den Zusammenhang zwischen dem Polytop P und den Kegeln σ_i im vorangehenden Satz mithilfe des sogenannten Normalenfächers. Es sei $P \subset M_{\mathbb{R}}$ ein Gitterpolytop und $v \in P$ eine Ecke. Dann schreiben wir

$$\sigma_v = \text{Cone}(P \cap M - v)^\vee \subset N_{\mathbb{R}} \quad \text{und} \quad \sigma_v^\vee \subset M_{\mathbb{R}}.$$

(Für $v = m_i$ wie oben ist also gerade $\sigma_v = \sigma_i$.)

Lemma. *Die Abbildung*

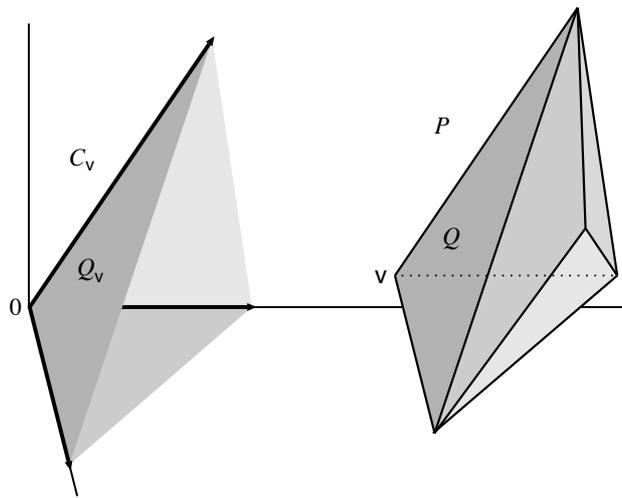
$$Q \mapsto Q_v = \text{Cone}(Q \cap M - v)$$

ist eine Bijektion zwischen der Menge der Seiten $Q \leq P$, die v enthalten, und der Menge der Seiten von des Kegels σ_v^\vee . Die Umkehrabbildung ist

$$Q_v \mapsto (Q_v + v) \cap P.$$

Genauer ist diese Bijektion ein dimensionserhaltender Isomorphismus von Verbänden.

Beweisskizze. Die Bijektivität läuft auf die beiden Gleichheiten $(\text{Cone}(Q \cap M - v) + v) \cap P = Q$ für eine Seite Q von P und $\text{Cone}((Q_v + v) \cap P \cap M - v) = Q_v$ für eine Seite Q_v von σ_v^\vee heraus, die man direkt nachrechnet (Übung!). Geometrisch einsichtig wird die Behauptung aus dem folgenden Bild.



Quelle: [CLS], §2.3, Figure 5

□

Insbesondere kommen die Facetten von σ_v^\vee von den Facetten von P , die v enthalten. Aus der Facettendarstellung

$$P = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u_F \rangle \geq -a_F \text{ für alle Facetten } F \leq P\}$$

bekommen wir deshalb die Darstellung

$$\sigma_v^\vee = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u_F \rangle \geq 0 \text{ für alle Facetten } F \leq P \text{ mit } v \in F\}.$$

Mit Dualität von polyedrischen Kegeln folgt daraus

$$\sigma_v = \text{Cone}(u_F \mid F \text{ Facette von } P \text{ mit } v \in F).$$

Ist $Q \leq P$ eine Seite, so setzen wir allgemeiner

$$\sigma_Q = \text{Cone}(u_F \mid F \text{ Facette von } P \text{ mit } Q \leq F).$$

Also ist σ_F der von u_F erzeugte Halbstrahl und $\sigma_P = \{0\}$ der von der leeren Menge erzeugte Kegel.

Definition. Es sei $P \subset M_{\mathbb{R}}$ ein volldimensionales Gitterpolytop und $Q \leq P$ eine Seite. Dann heißt der Kegel σ_Q der **Normalenkegel** von Q und

$$\Sigma_P = \{\sigma_Q \mid Q \leq P\}$$

der **Normalenfächer** von P .

Das Hauptergebnis über den Normalenfächer ist:

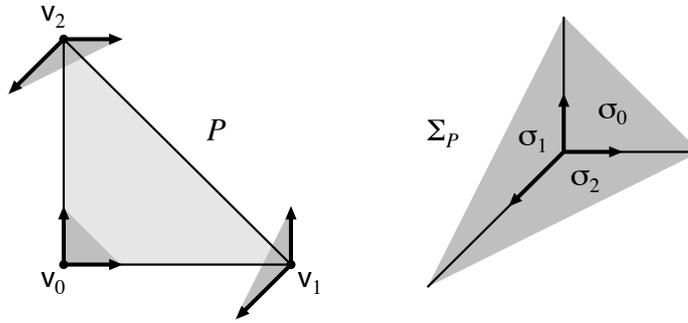
Satz 2.3.2. *Es sei $P \subset M_{\mathbb{R}}$ ein volldimensionales Gitterpolytop.*

(a) *Jede Seite eines Normalenkegels $\sigma_Q \in \Sigma_P$ liegt wieder in Σ_P .*

(b) *Der Durchschnitt zweier Kegel $\sigma_Q, \sigma'_Q \in \Sigma_P$ ist eine Seite von beiden.*

Beweis. Wir werden weiter unten eine genauere Aussage (Prop. 2.3.7) beweisen. \square

Beispiel 2.3.4. Sei P das ebene 2-Simplex mit Ecken $v_0 = 0, v_1 = e_1, v_2 = e_2$. Hier ist ein Bild von P und seinem Normalenfächer Σ_P , bestehend aus den Normalenkegeln $\sigma_i = \sigma_{v_i}$.



Quelle: [CLS], §2.3, Figure 6

Wir beweisen später, dass die Normalenkegel tatsächlich in der durch das Bild suggerierten Weise zusammenpassen.

Lemma 2.3.5. *Es sei Q eine Seite von P und sei $H_{u,b}$ eine affine Stützhyperebene von P mit $H_{u,b} \cap P \neq \emptyset$. Dann gilt $u \in \sigma_Q$ genau dann, wenn $Q \subset H_{u,b} \cap P$.*

Beweis. Sei $u \in \sigma_Q$, etwa $u = \sum_{Q \leq F} \lambda_F u_F$, $\lambda_F \geq 0$. Setze $b_0 = -\sum_{Q \leq F} \lambda_F a_F$, dann gilt $P \subset H_{u,b_0}^+$ und $Q \subset H_{u,b_0} \cap P$ (Check!). Also ist H_{u,b_0} eine Stützhyperebene. Da auch $H_{u,b}$ eine Stützhyperebene ist und $H_{u,b} \cap P \neq \emptyset$ gilt, muss $b = b_0$ sein und damit $Q \subset H_{u,b} \cap P$.

Umgekehrt gelte $Q \subset H_{u,b} \cap P$ und sei v eine Ecke von Q . Aus $P \subset H_{u,b}^+$ und $v \in H_{u,b}$ folgt dann $\sigma_v^\vee \subset H_{u,0}^+$. Also gilt $u \in (\sigma_v^\vee)^\vee = \sigma_v$, so dass u eine Darstellung

$$u = \sum_{v \in F} \lambda_F u_F \quad \text{mit} \quad \lambda_F \geq 0$$

besitzt. Ist nun F_0 eine Facette von P , die v aber nicht Q enthält, so wähle etwa $p \in Q \setminus F_0$. Aus $p, v \in Q \subset H_{u,b}$ folgt dann

$$b = \langle p, u \rangle = \sum_{v \in F} \lambda_F \langle p, u_F \rangle$$

$$b = \langle v, u \rangle = \sum_{v \in F} \lambda_F \langle v, u_F \rangle = - \sum_{v \in F} \lambda_F a_F.$$

Beides zusammen ergibt

$$\sum_{v \in F} \lambda \langle p, u_F \rangle = - \sum_{v \in F} \lambda_F a_F.$$

Andererseits ist $p \notin F_0$, also $\langle p, u_{F_0} \rangle > -a_{F_0}$. Wegen $\langle p, u_F \rangle \geq -a_F$ für alle F mit $v \in F$ muss deshalb $\lambda_{F_0} = 0$ gelten. In der Darstellung von u kommen also nur die F mit $Q \subset F_0$ vor, so dass $u \in \sigma_Q$ gilt. \square

Korollar 2.3.6. *Ist $Q \leq P$ eine Seite und $F \leq P$ eine Facette, dann gilt $u_F \in \sigma_Q$ genau dann, wenn $Q \subset F$.*

Beweis. Falls $u_F \in \sigma_Q$, so gilt $Q \subset H_{u_F, -a_F} \cap P = F$ nach dem Lemma. Die umgekehrte Richtung ist klar nach Definition von σ_Q . \square

Proposition 2.3.7. *Es sei P ein volldimensionales Gitterpolytop und seien Q, Q' Seiten von P . Es gelten:*

- (a) $Q \subset Q'$ genau dann, wenn $\sigma_{Q'} \subset \sigma_Q$.
- (b) Falls $Q \subset Q'$, dann ist $\sigma_{Q'}$ eine Seite von σ_Q . Alle Seiten von σ_Q sind von dieser Form.
- (c) $\sigma_Q \cap \sigma_{Q'} = \sigma_{Q''}$, wobei $Q'' = Q \vee Q'$ die kleinste Seite von P ist, die Q und Q' enthält.

Beweis. (a) Falls $Q \subset Q'$, so enthält jede Facette, die Q' enthält, auch Q , also $\sigma_{Q'} \subset \sigma_Q$. Die umgekehrte Richtung folgt aus Kor. 2.3.6 zusammen mit der Tatsache, dass jede Seite der Durchschnitt aller Facetten ist, die sie enthalten.

(b) Sei v eine Ecke von Q . Wir wenden die Dualität für Seiten von Kegeln (Prop. 1.2.10) auf die Seite Q_v von σ_v^\vee an und erhalten eine duale Seite

$$Q_v^* = (\sigma_v^\vee)^\vee \cap Q_v^\perp = \sigma_v \cap Q_v^\perp$$

von σ_v . Nun gilt $\sigma_v = \text{Cone}(u_F \mid v \in F)$ und deshalb

$$Q_v^* = \text{Cone}(u_F \mid v \in F, Q_v \subset H_{u_F, 0}).$$

Wegen $v \in Q$ ist die Inklusion $Q_v \subset H_{u_F, 0}$ äquivalent zu $Q \subset H_{u_F, -a_F}$, was gerade $Q \subset F$ bedeutet. Es folgt

$$Q_v^* = \text{Cone}(u_F \mid Q \subset F) = \sigma_Q.$$

Also ist σ_Q eine Seite von σ_v , und alle Seiten von σ_v entstehen in dieser Weise.

Ist nun $Q \subset Q'$, so ist $\sigma_{Q'}$ ebenfalls eine Seite von σ_v mit $\sigma_{Q'} \subset \sigma_Q$ und damit auch eine Seite von σ_Q . Außerdem ist jede Seite von σ_Q auch eine Seite von σ_v und damit von der Form $\sigma_{Q'}$ für eine Seite Q' von P . Nach (a) muss dann $Q \subset Q'$ gelten. Damit ist alles bewiesen.

(c) Sei Q'' die kleinste Seite von P , die Q und Q' enthält. Nach (b) ist $\sigma_{Q''}$ eine Seite von σ_Q und von $\sigma_{Q'}$. Insbesondere gilt $\sigma_{Q''} \subset \sigma_Q \cap \sigma_{Q'}$.

Beweise die umgekehrte Inklusion: Sei $u \in \sigma_Q \cap \sigma_{Q'}$, $u \neq 0$. Wähle $b \in \mathbb{R}$ derart, dass $H_{u, b}$ eine affine Stützhyperbene von P mit $H_{u, b} \cap P \neq \emptyset$ ist (so ein b existiert, weil P kompakt ist). Nach Lemma 2.3.5 gilt dann $Q, Q' \subset H_{u, b} \cap P$. Dies ist eine Seite von P , die Q und Q' enthält und damit auch Q'' . Erneute Anwendung von Lemma 2.3.5 zeigt $u \in \sigma_{Q''}$. \square

Proposition 2.3.8. *Es sei $P \subset M_{\mathbb{R}}$ ein volldimensionales Gitterpolytop, $n = \dim M_{\mathbb{R}}$.*

(a) *Für alle Seiten $Q \leq P$ gilt $\dim Q + \dim \sigma_Q = n$.*

(b) *Es gilt*

$$N_{\mathbb{R}} = \bigcup_{\nu \text{ Ecke von } P} \sigma_{\nu} = \bigcup_{\sigma_Q \in \Sigma_P} \sigma_Q.$$

Beweis. (a) Sei Q eine Seite von P und ν eine Ecke von Q . Wie oben gesehen gilt $Q_{\nu}^* = \sigma_Q$ und damit

$$\dim Q + \dim \sigma_Q = \dim Q_{\nu} + \dim Q_{\nu}^* = n$$

nach Prop. 1.2.10.

(b) Sei $u \in N_{\mathbb{R}}$, $u \neq 0$, und setze $b = \min\{\langle \nu, u \rangle \mid \nu \text{ Ecke von } P\}$. Dann gilt $P \subset H_{u,b}^+$, und außerdem $\nu \in H_{u,b}$ für mindestens eine Ecke ν von P . Nach Lemma 2.3.5 folgt daraus $u \in \sigma_{\nu}$. Dies beweist die erste Gleichheit. Die zweite ist damit klar. \square

Proposition 2.3.9. *Es sei $P \subset M_{\mathbb{R}}$ ein volldimensionales Gitterpolytop. Für jeden Gitterpunkt $m \in M$ und jedes $k \geq 1$ hat das Polytop $m + kP$ denselben Normalenfächer wie P .*

Beweis. Aufgabe 20. \square

Zurück zu projektiven torischen Varietäten: Wir können Satz 2.3.1 nun wie folgt interpretieren: Es sei P ein sehr amples Gitterpolytop und setze $s = |P \cap M|$. Betrachte die torische Varietät $X_{P \cap M} \subset \mathbb{P}^{s-1}$. Zu einer Ecke ν von P gehört die affine Karte U_{ν} in \mathbb{P}^{s-1} und die affinen Teile $X_{P \cap M} \cap U_{\nu}$ für verschiedene Ecken ν von P reichen aus, um $X_{P \cap M}$ zu überdecken. Satz 2.3.1 sagte nun gerade

$$X_{P \cap M} \cap U_{\nu} = U_{\sigma_{\nu}} = \text{Spec}(\mathbb{C}[\sigma_{\nu}^{\vee} \cap M]).$$

Der affine Teil $X_{P \cap M} \cap U_{\sigma_{\nu}}$ ist also gerade die torische Varietät zum Kegel σ_{ν} im Normalenfächer von P .

Als nächstes beschreiben wir nun den Schnitt zweier affiner Teile. Als Vorbereitung darauf brauchen wir Prop. 1.3.16, die sich im Skript weiter oben findet, in der Vorlesung aber noch nicht diskutiert wurde.

Proposition (siehe 1.3.16). *Es sei σ ein spitzer rationaler polyedrischer Kegel in $N_{\mathbb{R}}$ und sei $\tau = H_{m,0} \cap \sigma$ für $m \in \sigma^{\vee} \cap M$ eine Seite von σ . Dann gilt*

$$\mathbb{C}[S_{\tau}] = \mathbb{C}[S_{\sigma}]_{\chi^m},$$

also

$$U_{\tau} = (U_{\sigma})_{\chi^m}. \quad \square$$

Proposition 2.3.13. *Es sei $P \subset M_{\mathbb{R}}$ ein volldimensionales sehr amples Gitterpolytop. Seien ν, w zwei verschiedene Ecken von P und sei $Q = \nu \vee w$ die kleinste Seite, die ν und w enthält. Es gilt*

$$X_{P \cap M} \cap U_{\nu} \cap U_w = U_{\sigma_Q} = \text{Spec}(\mathbb{C}[\sigma_Q^{\vee} \cap M])$$

und die Inklusion

$$X_{P \cap M} \cap U_{\nu} \cap U_w \subset X_{P \cap M} \cap U_{\nu}$$

ist gerade die Inklusion

$$(U_{\sigma_v})_{\chi^{w-v}} \subset U_{\sigma_v}.$$

Beweis. Das, was wir bereits über die affinen Teile von $X_{P \cap M}$ gezeigt haben (Lemma vor Satz 2.3.1 und Beweis) sagt umgesetzt in die allgemeinere Notation genau

$$X_{P \cap M} \cap U_v \cap U_w = (U_{\sigma_v})_{\chi^{w-v}}.$$

Wir müssen also gerade

$$(U_{\sigma})_{\chi^{v-w}} = U_{\sigma_Q}$$

beweisen, dann sind wir fertig. Es gilt $w - v \in \sigma_v^\vee$, so dass $\tau = H_{w-v,0} \cap \sigma_v$ eine Seite von σ_v ist. Nach Prop. 1.3.16 gilt also

$$(U_{\sigma_v})_{\chi^{w-v}} = U_{\tau}.$$

Wir müssen also $\tau = \sigma_Q$ beweisen. Nach Prop. 2.3.7 wissen wir $\sigma_Q = \sigma_v \cap \sigma_w$, d.h. es ist

$$H_{w-v,0} \cap \sigma_v = \sigma_v \cap \sigma_w$$

zu zeigen. Sei $u \in H_{w-v,0} \cap \sigma_v$, $u \neq 0$. Dann gibt es $b \in \mathbb{R}$ so, dass $H_{u,b}$ eine affine Stützhyperebene von P mit $P \cap H_{u,b} \neq \emptyset$ ist. Nach Lemma 2.3.5 folgt aus $u \in \sigma_v$ nun $v \in H_{u,b}$. Wegen $u \in H_{w-v,0}$ ist $\langle w, u \rangle = \langle v, u \rangle$, also auch $w \in H_{u,b}$. Wieder mit Lemma 2.3.5 folgt $u \in \sigma_w$.

Für die umgekehrte Inklusion, sei $u \in \sigma_v \cap \sigma_w$, $u \neq 0$. Wähle wieder $b \in \mathbb{R}$ wie oben. Mit Lemma 2.3.5 folgt dann $v, w \in H_{u,b}$ und damit $u \in H_{w-v,0}$. \square

Das alles rechtfertigt nun folgende Definition.

Definition. Es sei $P \subset M_{\mathbb{R}}$ ein volldimensionales Gitterpolytop. Die **torische Varietät** zu P ist dann

$$X_P = X_{(kP) \cap M}$$

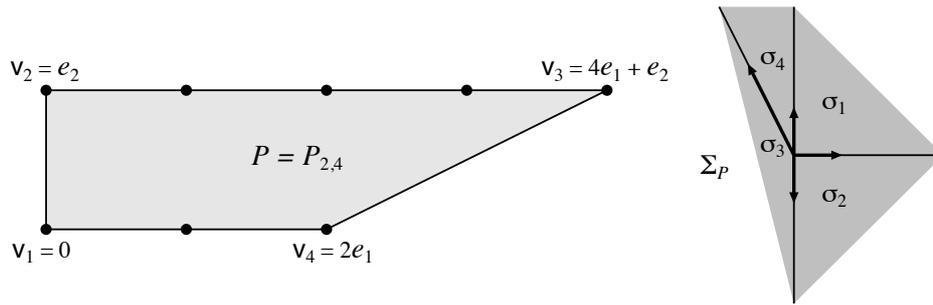
wobei k eine positive ganze Zahl ist derart, dass kP sehr ampel ist.

Der Clou an dieser Definition ist, dass die eingebettete torische Varietät $X_{(kP) \cap M} \subset \mathbb{P}^{s-1}$ mit $s = |(kP) \cap M|$ zwar von k abhängt, die affinen Teile und ihre Verklebung aber nicht. Die abstrakten projektiven Varietäten sind damit von k unabhängig. (Bald behandeln wir abstrakte torische Varietäten systematischer.)

Beispiel. Es sei $\Delta_n \subset \mathbb{R}^n$ der von 0 und den Einheitsvektoren aufgespannte n -Simplex. Das Polytop Δ_n ist normal und damit sehr ampel. Die Gitterpunkte in $k\Delta_n$ entsprechen gerade den Exponenten aller $s = \binom{n+k}{k}$ Monome in $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]$ vom Totalgrad höchstens k . Die zugehörige torische Varietät $X_{(k\Delta_n) \cap \mathbb{Z}^n} \subset \mathbb{P}^{s-1}$ ist gerade die k -te Veronese-Einbettung von \mathbb{P}^n . Insbesondere ist $X_{\Delta_n} = \mathbb{P}^n$.

Beispiel. Es seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq a \leq b$ und setze

$$P_{a,b} = \text{Conv}(0, ae_1, e_2, be_1 + e_2) \subset \mathbb{R}^2.$$



Das Polygon $P_{2,4}$ mit seinem Normalenfächer (Quelle: [CLS], §2.3, Figure 9)

Dieses Polygon hat die Gitterpunkte $(0, 0), (1, 0), \dots, (a, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 1), \dots, (b, 1)$, also $a + b + 2$ Stück. Die torische Varietät $X_{P_{a,b}}$ eingebettet in \mathbb{P}^{a+b+1} ist also der Abschluss des Bildes von

$$\begin{cases} \mathbb{C}^2 & \rightarrow & \mathbb{P}^{a+b+1} \\ (s, t) & \mapsto & (1 : s : s^2 : \dots : s^a : t : st : s^2t : \dots : s^b t) \end{cases} .$$

Die Varietät $X_{P_{a,b}}$ heißt die **rationale Normalenrolle** („rational normal scroll“).

- (1) Man kann zeigen, dass das Verschwindungsideal von $X_{P_{a,b}}$ in $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_a, y_0, \dots, y_a]$ von den 2×2 -Minoren der Matrix

$$\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{a-1} & y_0 & y_1 & \dots & y_{b-1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_a & y_1 & y_2 & \dots & y_b \end{bmatrix}$$

erzeugt wird.

- (2) Um die Varietät geometrisch besser zu verstehen und den seltsamen Namen zu erklären, betrachte die (partiell homogenisierte) Abbildung

$$\begin{cases} \mathbb{C} \times \mathbb{P}^1 & \rightarrow & \mathbb{P}^{a+b+1} \\ (s, (\lambda : \mu)) & \mapsto & (\lambda : s\lambda : s^2\lambda : \dots : s^a\lambda : \mu : s\mu : s^2\mu : \dots : s^b\mu) \end{cases} ,$$

die das gleiche Bild hat wie die Abbildung oben. Für $(\lambda : \mu) = (1 : 0)$ degeneriert diese Abbildung zu $s \mapsto (1, s^2, \dots, s^a, 0, \dots, 0)$. Dies gibt gerade eine rationale Normalenkurve vom Grad b . Analog entsteht für $(\lambda : \mu) = (0 : 1)$ eine rationale Normalenkurve vom Grad a in den hinteren Koordinaten. Fixiert man andererseits s , so erhält man für laufendes $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$ eine Verbindungsgerade zwischen den Punkten auf diesen beiden rationalen Normalenkurven. In diesem Sinn kann man sich die Varietät wie eine Art Schriftrolle vorstellen.

- (3) Interessant im gegenwärtigen Kontext ist die Beobachtung, dass der Normalenkegel von $P_{a,b}$ offenbar nur von $b - a$ abhängt, da dies die Steigung der schrägen Seite festlegt. Als abstrakte torische Varietäten gilt also

$$X_{P_{1,r+1}} = X_{P_{2,r+2}} = \dots$$

2.4. Eigenschaften projektiver torischer Varietäten

Erinnerung: Eine irreduzible Varietät X heißt **normal**, wenn alle ihre lokalen Ringe $\mathcal{O}_{X,p}$, $p \in X$, ganz abgeschlossen sind. Äquivalent ist, dass jede affin-offene Untervarietät $U \subset X$ normal ist, also der Koordinatenring $\mathbb{C}[U]$ ganz abgeschlossen ist.

Satz 2.4.1. *Es sei $P \subset M_{\mathbb{R}}$ ein volldimensionales Gitterpolytop.*

- (a) *Die torische Varietät X_P ist normal.*
- (b) *Es sei $\mathcal{A} = (kP \cap M) \times \{1\} \subset M \times \mathbb{Z}$. Die affine Varietät $Y_{\mathcal{A}}$ ist genau dann normal, wenn kP normal ist.*

Beweis. (a) Wir wissen bereits, dass X_P durch affine torische Varietäten der Form U_{σ} überdeckt wird, wobei σ ein spitzer, rationaler polyedrischer Kegel ist. Nach Satz 1.3.5. sind diese U_{σ} alle normal.

(b) Nach Satz 1.3.5. (und seinem Beweis) ist $Y_{\mathcal{A}}$ genau dann normal, wenn die Halbgruppe $\mathbb{N}\mathcal{A}$ in $M \times \mathbb{Z}$ saturiert ist. Mit Hilfe von Aufgabe 18 überzeugt man sich leicht davon, dass dies genau dann der Fall ist, wenn kP normal ist. \square

Bemerkung. Sei $s = |\mathcal{A}|$. Nach Prop. 2.1.3. ist $Y_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{C}^s$ gerade der affine Kegel über $X_{kP \cap M} \subset \mathbb{P}^{s-1}$. Wenn der affine Kegel über einer projektiven Varietät normal ist, so heißt diese **projektiv normal**. Im Unterschied zur Normalität ist diese Eigenschaft allerdings abhängig von der Einbettung in einen projektiven Raum (wie man hier auch sieht, da kP für ein bestimmtes k sehr ampel aber nicht normal sein kann).

Als nächstes geht es um Glattheit. Erinnerung: Ein polyedrischer Kegel $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ heißt **glatt**, wenn sich seine Halbstrahlgeneratoren zu einer \mathbb{Z} -Basis von N ergänzen lassen.

Definition. Es sei $P \subset M_{\mathbb{R}}$ ein Gitterpolytop. Sei $E \subset P$ eine Kante und $v \in E$ eine Ecke. Mit w_E bezeichnen wir das eindeutige Element von M derart, dass $w_E - v$ der Halbstrahlgenerator von $\text{Cone}(E - v)$ ist. (Anschaulich gesagt ist w_E also der erste von v verschiedene Gitterpunkt in der Kante E neben v).

Das Polytop P heißt **glatt** oder **unimodular**, wenn folgendes gilt: Für jede Ecke v von P lassen sich die Vektoren $\{w_E - v \mid E \text{ Ecke mit } v \in E\}$ zu einer Gitterbasis von M erweitern.

Falls P volldimensional ist, so bedeutet Glattheit gerade, dass die $w_E - v$ für jedes v eine Gitterbasis von M bilden.

Satz 2.4.3. *Es sei $P \subset M_{\mathbb{R}}$ ein volldimensionales Gitterpolytop. Äquivalent sind:*

- (a) *Die projektive torische Varietät X_P ist glatt.*
- (b) *Der Normalenfächer Σ_P ist glatt, was bedeutet, dass alle Normalenkegel von P glatt sind.*
- (c) *Das Polytop P ist glatt.*

Beweis. Genau dann ist X_P glatt, wenn alle affinen Teile U_{σ_v} (v Ecke von P) glatt sind. Nach Satz 1.3.12. ist das genau dann der Fall, wenn die Kegeln σ_v glatt sind. Da Seiten glatter Kegeln glatt sind und Σ_P nach Prop. 2.3.7. genau aus den Kegeln σ_v und ihren Seiten besteht, ist (a) \Leftrightarrow (b) damit bewiesen.

Um (b) \Leftrightarrow (c) zu sehen, bemerke zunächst, dass σ_v genau dann glatt ist, wenn σ_v^\vee glatt. Die Halbstrahlgeneratoren von σ_v^\vee sind genau die $w_E - v$ in der Definition oben. Also ist P genau dann glatt, wenn alle σ_v^\vee glatt sind. \square

Proposition 2.4.4. *Jedes volldimensionale glatte Gitterpolytop ist sehr ampel.*

Beweis. Aufgabe 23. \square

Bemerkung. Es es ist eine offene Frage, ob jedes glatte volldimensionale Gitterpolytop sogar normal ist.

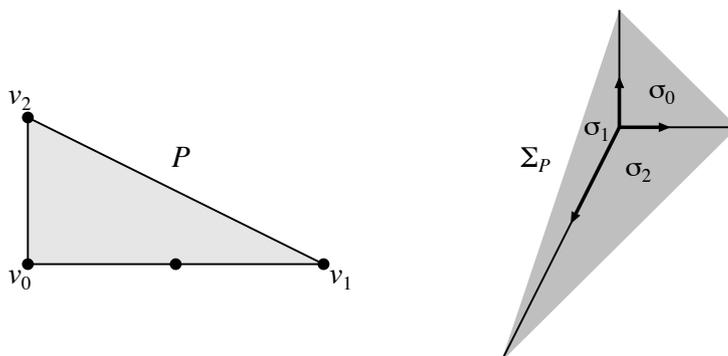
Beispiel 2.4.6. Es sei $P = \text{Conv}(0, 2e_1, e_2) \subset \mathbb{R}^2$. Es gilt $P \cap \mathbb{Z}^2 = \{0, e_1, 2e_1, e_2\}$. Da P sehr ampel ist, ist die Varietät X_P der Abschluss des Bildes von

$$\begin{cases} (\mathbb{C}^*)^2 & \rightarrow & \mathbb{P}^3 \\ (s, t) & \mapsto & (1, s, s^2, t) \end{cases} .$$

In homogenen Koordinaten y_0, y_1, y_2, y_3 gilt dann

$$X_{P \cap \mathbb{Z}^2} = \mathbf{V}(y_0 y_2 - y_1^2).$$

Diese Varietät ist nicht glatt, denn sie hat den singulären Punkt $(0 : 0 : 0 : 1)$ (Check!). Betrachten wir hierzu die Situation aus Satz 2.4.3.



Quelle: [CLS], §2.4, Figure 11

Man sieht direkt, dass σ_0 und σ_1 glatt sind, σ_2 dagegen nicht. Dies zeigt erneut, dass X_P nicht glatt ist. Bald studieren wir die Korrespondenz zwischen Kegeln im Normalenfächern und Bahnen der Operation des Torus und werden dann sehen, dass der Kegel σ_2 tatsächlich genau dem singulären Punkt entspricht.

3. ABSTRAKTE TORISCHE VARIETÄTEN

3.0. Abstrakte Varietäten

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, wie sich die affinen Teile einer projektiven torischen Varietät mit einander verkleben. Das machen wir jetzt systematisch und für allgemeine algebraische Varietäten.

Wir setzen das meiste an grundlegender Maschinerie über abstrakte Varietäten als bekannt voraus, wiederholen aber kurz ein paar wesentliche Punkte. Es sei V eine affine Varietät und U eine Zariski-offene Teilmenge. Eine Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **regulär** in einem Punkt $p \in U$, wenn es eine offene Umgebung W von p in U gibt und Elemente $g, h \in \mathbb{C}[V]$ des Koordinatenrings mit $h(q) \neq 0$ und

$$f(q) = \frac{g(q)}{h(q)}$$

für alle $q \in W$. Die Funktion f heißt regulär auf U , wenn sie in allen Punkten von U regulär ist. Diese Funktionen bilden einen Ring

$$\mathcal{O}_V(U) = \{f: U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ist regulär}\}.$$

Aus dieser Definition heraus beweist man nun

- $\mathcal{O}_V(V) = \mathbb{C}[V]$;
- $\mathcal{O}_V(V_f) = \mathbb{C}[V]_f$ für $f \in \mathbb{C}[V]$.

Es sei nun $\{V_\alpha\}, \alpha \in I$, eine endliche Familie von affinen Varietäten, und für alle $\alpha, \beta \in I$ seien $V_{\beta\alpha} \subset V_\alpha$ Zariski-offene Teilmengen und Isomorphismen

$$\varphi_{\beta\alpha}: V_{\beta\alpha} \rightarrow V_{\alpha\beta}.$$

mit den folgenden Eigenschaften gegeben:

- (1) $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_{\beta\alpha}^{-1}$
- (2) $\varphi_{\beta\alpha}(V_{\beta\alpha} \cap V_{\gamma\alpha}) = V_{\alpha\beta} \cap V_{\gamma\beta}$
- (3) $\varphi_{\gamma\alpha} = \varphi_{\gamma\beta} \circ \varphi_{\beta\alpha}$ auf $V_{\beta\alpha} \cap V_{\gamma\alpha}$

für alle $\alpha, \beta, \gamma \in I$. Sind solche Daten gegeben, so kann man eine algebraische Varietät durch **Verkleben** herstellen: Es sei $Y = \coprod Y_\alpha$ die disjunkte Vereinigung mit der Relation $a \sim b$ genau dann, wenn $a \in V_\alpha$ und $b \in V_\beta$ mit $b = \varphi_{\beta\alpha}(a)$. Aus den obigen Eigenschaften (1)-(3) folgt gerade, dass dies eine Äquivalenzrelation ist. Sei $X = Y / \sim$ die Menge der Äquivalenzklassen, versehen mit der Quotiententopologie. Für $\alpha \in I$ sei $\psi_\alpha: V_\alpha \rightarrow X$ die Abbildung, die jedem $a \in V_\alpha$ seine Äquivalenzklasse in X zuordnet. Für jedes α ist dann $U_\alpha = \psi_\alpha(V_\alpha)$ eine offene Teilmenge von X und $\psi_\alpha: V_\alpha \rightarrow U_\alpha$ ein Homöomorphismus.

Beispiel. Die projektive Varietät $X = \mathbb{P}^n$ erhält man auf diese Weise aus $n+1$ Kopien von \mathbb{C}^n , nämlich so: Es sei $I = \{0, \dots, n\}$, $V_i = \mathbb{C}^n$ und $V_{ij} = \{u \in V_j \mid u_i \neq 0\}$. Die Isomorphismen

sind dann die Abbildungen

$$\varphi_{ji}: \begin{cases} V_{ji} & \rightarrow & V_{ij} \\ (u_0, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n) & \mapsto & \left(\frac{u_0}{u_j}, \dots, \frac{u_{i-1}}{u_j}, \frac{1}{u_j}, \frac{u_{i+1}}{u_j}, \dots, \frac{u_{j-1}}{u_j}, \frac{u_{j+1}}{u_j}, \dots, \frac{u_n}{u_j} \right) \end{cases}.$$

Schreibt man die Äquivalenzklassen in $\mathbb{P}^n = Y / \sim$ wie gewohnt in homogenen Koordinaten, dann ist die Abbildung $\psi_i: U_i \rightarrow \mathbb{P}^n$ gerade gegeben durch $(u_0, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n) \mapsto (u_0 : \dots : u_{i-1} : 1 : u_{i+1} : \dots : u_n)$.

Die Struktur als algebraische Varietät auf X wie oben ist, mit allem was dazugehört, nun dadurch erklärt, dass man immer alles durch „Zurückziehen“ auf die affinen Teile U_α zurückspielt. Ist $U \subset X$ eine offene Teilmenge, so heißt eine Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ **regulär** auf U , wenn $f \circ \psi_\alpha$ regulär auf der offenen Teilmenge $\psi_\alpha^{-1}(U)$ von V_α ist, für alle $\alpha \in I$. Wieder bilden die regulären Funktionen einen Ring, geschrieben $\mathcal{O}_X(U)$. Die **Strukturgarbe** von X ist die Zuordnung

$$U \mapsto \mathcal{O}_X(U)$$

definiert auf allen Zariski-offenen Teilmengen von X . Diese Zuordnung ist eine Garbe, was gerade bedeutet, dass Funktionen sich aus lokalen Daten verkleben lassen, genau wie die Varietät selbst: Ist $\{W_\alpha\}$ eine offene Überdeckung einer offenen Teilmenge $U \subset X$ und sind $f_\alpha: W_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ reguläre Funktionen mit $f_\alpha|_{W_\alpha \cap W_\beta} = f_\beta|_{W_\alpha \cap W_\beta}$ für alle α, β , dann (und nur dann) gibt es eine Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f|_{W_\alpha} = f_\alpha$.

Ein **Morphismus** zwischen zwei abstrakten Varietäten X und Y ist eine stetige Abbildung $\Phi: X \rightarrow Y$ mit der Eigenschaft, dass $f \circ \Phi \in \mathcal{O}_X(\Phi^{-1}(U))$ für alle offenen Teilmenge $U \subset Y$ und alle $f \in \mathcal{O}_Y(U)$ gilt.

Wie so oft, wenn man so allgemein definiert, holt man sich auch allerhand Dinge ins Haus, auf die man (vielleicht) gern verzichtet hätte: Es sei $I = \{1, 2\}$, $V_1 = V_2 = \mathbb{C}$ und $V_{21} = \{u \in V_1 \mid u \neq 0\}$, $V_{12} = \{u \in V_2 \mid u \neq 0\}$. Nimmt man die Verklebung

$$\varphi_{21}: \begin{cases} U_{21} & \rightarrow & U_{12} \\ u & \mapsto & 1/u \end{cases}$$

und $g_{12} = g_{21}^{-1}$ so ist die resultierende Varietät gerade \mathbb{P}^1 , wie im Beispiel oben. Nimmt man aber versehentlich die Verklebung

$$\varphi_{21}: \begin{cases} U_{21} & \rightarrow & U_{12} \\ u & \mapsto & u \end{cases}$$

dann entsteht eine Gerade mit „doppeltem Nullpunkt“. Das ist weniger schön.

Definition. Eine Varietät X heißt **separiert**, wenn das Bild der Diagonalabbildung $X \rightarrow X \times X$ in $X \times X$ Zariski-abgeschlossen ist.

Vorher muss man sich natürlich um eine Varietätsstruktur auf $X \times X$ bemühen, was wir als bekannt voraussetzen (Tensorprodukte der Koordinatenringe im Affinen. Dann Verkleben. Nicht schwierig, aber im allgemeinen sehr lästig hinzuschreiben.) Der springende Punkt ist, dass die Bedingung nicht erfüllt ist, wenn X z.B. die Gerade mit doppeltem

Nullpunkt ist. Denn in diesem Fall ist $X \times X$ eine Ebene mit vierfachem Nullpunkt, aber das Bild von X in $X \times X$ unter der Diagonalabbildung besteht nur aus der Diagonalen mit doppeltem Nullpunkt. Man zeigt dann, dass diese nicht abgeschlossen ist (im Abschluss liegen alle vier Exemplare des Nullpunkts).

Bemerkung. Die Definition von Separiertheit entspricht der Hausdorffschen Trennungseigenschaft von topologischen Räumen. Tatsächlich ist eine Varietät X (hier ja immer über \mathbb{C}) genau dann separiert, wenn sie bezüglich der klassischen (komplexen) Topologie ein Hausdorffraum ist.

Bemerkung. Eine durch Verklebedaten $\{V_\alpha\}, \{\varphi_{\beta\alpha}\}$ entstandene Varietät X ist genau dann separiert, wenn das Bild von

$$\begin{cases} V_{\beta\alpha} & \rightarrow & V_{\beta\alpha} \times V_{\alpha\beta} \\ p & \mapsto & (p, \varphi_{\beta\alpha}(p)) \end{cases}$$

in $V_\alpha \times V_\beta$ abgeschlossen ist, für alle α, β .

Nützliche Konsequenzen der Separiertheit sind auch so ähnlich wie bei Hausdorffräumen:

Proposition 3.0.18. *Es seien X und Y Varietäten und sei X separiert.*

- (a) *Sind $\varphi, \psi: Y \rightarrow X$ Morphismen, so ist die Menge $\{y \in Y \mid \varphi(y) = \psi(y)\}$ abgeschlossen in Y . Insbesondere stimmen φ und ψ bereits überein, wenn sie auf einer dichten Teilmenge von Y übereinstimmen.*
- (b) *Sind U und V affine offene Teilmengen von X , so ist auch $U \cap V$ affin.*

Dass eine abstrakte Varietät V affin ist bedeutet dabei gerade, dass sie als abstrakte Varietät zu einer affinen Varietät isomorph ist. Das ist genau dann der Fall, wenn der natürliche Morphismus $V \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{C}[V])$ ein Isomorphismus ist.

3.1. Fächer und normale torische Varietäten

Eine projektive torische Varietät entsteht aus einem Polytop durch Verklebung der affinen Teile, die durch die Normalenkegel des Polytops gegeben sind. Das machen wir jetzt allgemeiner: Seien wie üblich M und N duale Gitter in Vektorräumen $M_{\mathbb{R}}, N_{\mathbb{R}}$.

Definition. Ein (polyedrischer) **Fächer** in $N_{\mathbb{R}}$ ist eine endliche Menge Σ von Kegeln in $N_{\mathbb{R}}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (a) Jeder Kegel σ in Σ ist spitz, rational und polyedrisch.
- (b) Für jedes $\sigma \in \Sigma$ liegen auch alle Seiten von σ in Σ .
- (c) Für alle $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ ist $\sigma_1 \cap \sigma_2$ eine Seite von beiden (und damit in Σ).

Der **Träger** von Σ ist $|\Sigma| = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma \subset N_{\mathbb{R}}$. Außerdem schreiben wir $\Sigma(r)$ für die Menge aller r -dimensionalen Fächer in Σ .

Es sei Σ ein Fächer. Zu jedem $\sigma \in \Sigma$ gehört die affine torische Varietät

$$U_\sigma = \text{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma]), \quad S_\sigma = \sigma^\vee \cap M.$$

Ist $\tau = \sigma \cap H_m$, $m \in \sigma^\vee$, eine Seite, dann haben wir gesehen (Prop. 1.3.16), dass

$$\mathbb{C}[S_\tau] = \mathbb{C}[S_\sigma]_{\chi^m} \text{ und damit } U_\tau = (U_\sigma)_{\chi^m}.$$

Ist außerdem $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$, so gilt

$$\sigma_1 \cap H_m = \tau = \sigma_2 \cap H_m$$

für ein $m \in \sigma_1^\vee \cap (-\sigma_2)^\vee \cap M$ nach dem Trennungslemma 1.2.13. Dies zeigt, dass

$$U_{\sigma_1} \supset (U_{\sigma_1})_{\chi^m} = U_\tau = (U_{\sigma_2})_{\chi^{-m}} \subset U_{\sigma_2}.$$

Wir haben also einen kanonischen Isomorphismus

$$\varphi_{\sigma_2, \sigma_1}: (U_{\sigma_1})_{\chi^m} \xrightarrow{\sim} (U_{\sigma_2})_{\chi^{-m}}.$$

Wir müssen uns überzeugen, dass die affinen torischen Varietäten U_σ für $\sigma \in \Sigma$ zusammen mit den Isomorphismen $\varphi_{\sigma_2, \sigma_1}$ die Voraussetzungen für eine Verklebung wie im vorangehenden Abschnitt erfüllen (Aufgabe 25). Wir erhalten dann eine Varietät, die wir mit X_Σ bezeichnen. Unser erstes Ziel ist:

Satz 3.1.5. *Es sei Σ ein Fächer in $N_{\mathbb{R}}$. Die Varietät X_Σ ist eine normale, separierte, torische Varietät.*

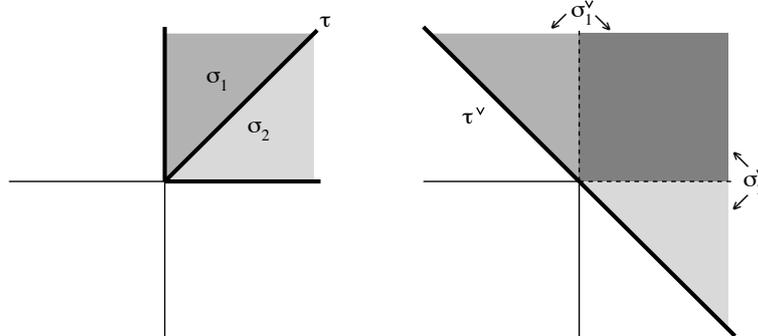
Für den Beweis brauchen wir noch eine kleine Vorbereitung.

Proposition 3.1.3. *Seien $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ und $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$. Dann gilt*

$$S_\tau = S_{\sigma_1} + S_{\sigma_2}.$$

Beweis. Aus $\sigma_1^\vee + \sigma_2^\vee = (\sigma_1 \cap \sigma_2)^\vee = \tau^\vee$ folgt die Inklusion $S_{\sigma_1} + S_{\sigma_2} \subset S_\tau$. Für die umgekehrte Inklusion, sei $x \in S_\tau$ und sei $m \in \sigma_1^\vee \cap (-\sigma_2)^\vee \cap M$ mit $\sigma_1 \cap H_m = \tau = \sigma_2 \cap H_m$. Da $S_\tau = S_{\sigma_1} + \mathbb{Z}m$ nach Prop. 1.3.16 gilt, gibt es $y \in S_{\sigma_1}$ und $\ell \in \mathbb{N}$ mit $x = y + \ell(-m)$. Nun ist $-m \in \sigma_2^\vee$, also $x \in S_{\sigma_1} + S_{\sigma_2}$. \square

Beispiel. Es sei $\sigma_1 = \text{Cone}(e_1 + e_2, e_2)$ und $\sigma_2 = \text{Cone}(e_1, e_1 + e_2)$ in $N_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$. Dann ist $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2 = \text{Cone}(e_1 + e_2)$. Die folgende Abbildung zeigt die vorkommenden Kegel.



Quelle: [CLS], §3.1, Figure 1

Die zugehörige torische Varietät wird in Aufgabe 26 untersucht.

Beweis von 3.1.5. Da die Kegel in Σ nach Voraussetzung alle spitz sind, ist der Torus $T_N = \text{Spec}(\mathbb{C}[M])$ in allen U_σ enthalten (Satz 1.2.18). Diese Tori werden unter der Verklebung alle miteinander identifiziert, so dass $T_N \subset X_\Sigma$ gilt. Außerdem verklebt die Operation von T_N auf den U_σ zu einer Operation auf X_Σ , was daran liegt, dass der Isomorphismus $\varphi_{\sigma_2, \sigma_1}$ auf $\mathbb{C}[S_{\sigma_1 \cap \sigma_2}]$ die Identität induziert. Also ist X_Σ eine torische Varietät. Außerdem sind die U_σ alle normal und damit auch X_Σ .

Es bleibt zu zeigen, dass X_Σ separiert ist. Dafür reicht es zu beweisen, dass das Bild der Diagonalabbildung

$$\Delta: U_\tau \rightarrow U_{\sigma_1} \times U_{\sigma_2}$$

für $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$ abgeschlossen ist. Dieses Δ entspricht dem Homomorphismus

$$\Delta^*: \mathbb{C}[S_{\sigma_1}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[S_{\sigma_2}] \rightarrow \mathbb{C}[S_\tau]$$

gegeben durch $\chi^m \otimes \chi^{m'} \mapsto \chi^{m+m'}$. Prop. 3.1.3 sagt nun gerade, dass dieser Homomorphismus surjektiv ist, so dass

$$\mathbb{C}[S_\tau] \cong (\mathbb{C}[S_{\sigma_1}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[S_{\sigma_2}]) / \ker(\Delta^*),$$

was genau das Bild von Δ in $U_{\sigma_1} \times U_{\sigma_2}$ als abgeschlossene Teilmenge realisiert. \square

Wir halten fest, dass die abstrakte Konstruktion den projektiven Fall verallgemeinert.

Proposition 3.1.6. *Es sei $P \subset M_{\mathbb{R}}$ ein volldimensionales Gitterpolytop. Dann gilt $X_P \cong X_{\Sigma_P}$, wobei Σ_P der Normalenfächer von P ist.*

Beweis. Dies gilt nach Prop. 2.3.13 zusammen mit der Tatsache, dass der Normalenfächer von kP für $k > 0$ nicht von k abhängt. \square

Zeit für Beispiele!

Beispiel 3.1.9. Es sei $\Delta_2 = \text{Conv}(0, e_1, e_2)$ das Standardsimplex in der Ebene und sei Σ sein Normalenfächer. Wir wissen schon, dass $\mathbb{P}_\Sigma = \mathbb{P}^2$ gilt, wollen daran aber noch einmal die Verklebungskonstruktion nachvollziehen.

Der Fächer Σ enthält drei volldimensionale Teile, nämlich $\sigma_0 = \text{Cone}(e_1, e_2)$, $\sigma_1 = \text{Cone}(-e_1 - e_2, e_2)$, $\sigma_2 = \text{Cone}(e_1, -e_1 - e_2)$, sowie den Nullpunkt und drei Halbstrahlen. Die dualen Kegel in $M_{\mathbb{R}}$ dazu sind

$$\sigma_0^\vee = \text{Cone}(e_1, e_2)$$

$$\sigma_1^\vee = \text{Cone}(-e_1, -e_1 + e_2)$$

$$\sigma_2^\vee = \text{Cone}(e_1 - e_2, -e_2).$$

Die torische Varietät X_Σ entsteht durch Verkleben der drei affin-offenen Teile $\mathbb{C}[S_{\sigma_i}] = \mathbb{C}[\sigma_i^\vee \cap M]$, also

$$U_{\sigma_0} = \text{Spec}(\mathbb{C}[S_{\sigma_0}]) \cong \text{Spec}(\mathbb{C}[x, y])$$

$$U_{\sigma_1} = \text{Spec}(\mathbb{C}[S_{\sigma_1}]) \cong \text{Spec}(\mathbb{C}[x^{-1}, x^{-1}y])$$

$$U_{\sigma_2} = \text{Spec}(\mathbb{C}[S_{\sigma_2}]) \cong \text{Spec}(\mathbb{C}[xy^{-1}, y^{-1}]).$$

Nach Prop. 3.1.3 ist die Verklebung auf den Koordinatenringen gegeben durch

$$\begin{aligned} \varphi_{01}^* : \mathbb{C}[x, y]_x &= \mathbb{C}[x^{-1}, x^{-1}y]_{x^{-1}} \\ \varphi_{02}^* : \mathbb{C}[x, y]_y &= \mathbb{C}[xy^{-1}, y^{-1}]_{y^{-1}} \\ \varphi_{12}^* : \mathbb{C}[x^{-1}, x^{-1}y]_{x^{-1}y} &= \mathbb{C}[xy^{-1}, y^{-1}]_{xy^{-1}}. \end{aligned}$$

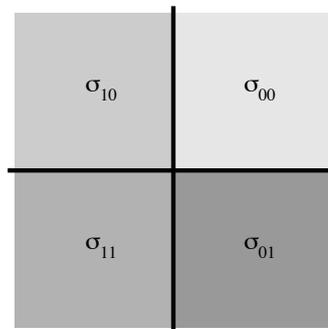
Mit homogenen Koordinaten $(x_0 : x_1 : x_2)$ auf \mathbb{P}^2 und $x = \frac{x_1}{x_0}$ und $y = \frac{x_2}{x_0}$ sieht man, dass U_{σ_i} gerade $U_i \subset \mathbb{P}^2$ entspricht, so dass tatsächlich $X_\Sigma \cong \mathbb{P}^2$ gilt.

Beispiel 3.1.10. Allgemein ist \mathbb{P}^n die torische Varietät zum n -dimensionalen Standard-simplex in \mathbb{R}^n . Der zugehörige Normalenfächer wird von allen echten Teilmengen von $\{e_0, \dots, e_n\}$ mit $e_0 = -e_1 - e_2 - \dots - e_n$ aufgespannt.

Beispiel 3.1.11. Wir bestimmen alle torischen Varietäten, die aus 1-dimensionalen Fächern entstehen (und damit alle 1-dimensionalen torischen Varietäten; dazu später). Sei dazu $N = \mathbb{Z}$ und $N_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$. Die spitzen Kegel in N sind die Intervalle $\sigma_0 = [0, \infty)$, $\sigma_1 = (-\infty, 0]$ und $\tau = \{0\}$. Es gibt also vier mögliche Fächer, die folgenden Varietäten entsprechen:

Fächer	Varietät
$\{\tau\}$	\mathbb{C}^*
$\{\sigma_0, \tau\}$ und $\{\sigma_1, \tau\}$	\mathbb{C}
$\{\sigma_0, \sigma_1, \tau\}$	\mathbb{P}^1 .

Beispiel 3.1.12. Nach Aufgabe 24 entsprechen Produkte von Polytopen den Produkten der torischen Varietäten. Das Produkt $\Delta_m \times \Delta_n$ entspricht also $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$. Dabei ist der Normalenfächer des Produkts gleich dem Produkt der Normalenfächer. Der Fächer



Quelle: [CLS], §3.1, Figure 3

in der Ebene entspricht also genau $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ (wobei $\sigma_{ij} = \sigma_i \times \sigma_j$ mit der Notation wie oben).

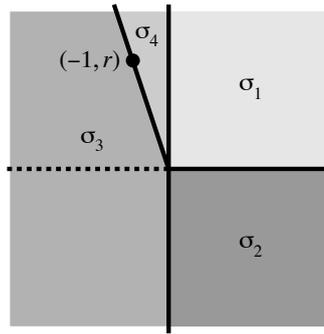
Allgemein gilt

Proposition 3.1.14. Sind $\Sigma_1 \subset (N_1)_{\mathbb{R}}$ und $\Sigma_2 \subset (N_2)_{\mathbb{R}}$ zwei Fächer, so ist $\Sigma_1 \times \Sigma_2 = \{\sigma_1 \times \sigma_2 \mid \sigma_1 \in \Sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma_2\}$ ein Fächer in $(N_1 \times N_2)_{\mathbb{R}}$ und es gilt

$$X_{\Sigma_1 \times \Sigma_2} \cong X_{\Sigma_1} \times X_{\Sigma_2}.$$

Beweis. Sparen wir uns. □

Beispiel 3.1.16. Der Fächer $\Sigma_r \subset \mathbb{R}^2$ im folgenden Bild



Quelle: [CLS], §3.1, Figure 4

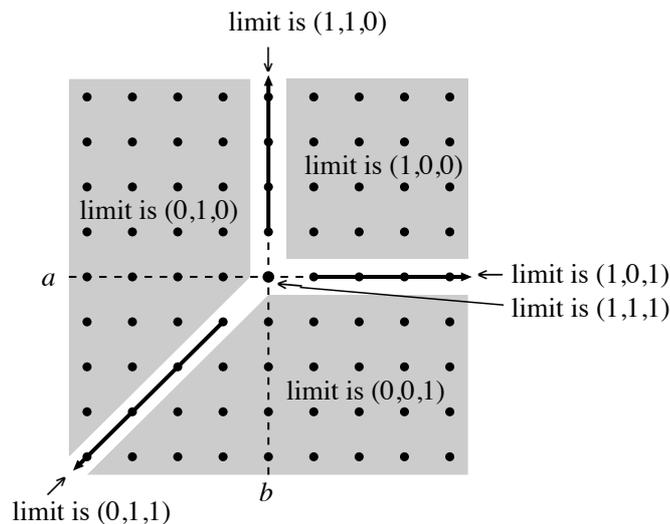
ist der duale Fächer zum Polytop $P_{a,b} = \text{Conv}(0, ae_1, e_2, be_1 + e_2)$, $a \leq b$, aus Beispiel 2.3.16. Die zugehörige torische Varietät in \mathbb{P}^{a+b-1} ist die rationale Normalenrolle. Die abstrakte torische Fläche $X_{\Sigma_{b-a}} \cong X_{P_{a,b}}$ heißt die **Hirzebruch-Fläche** \mathcal{H}_{b-a} zum Parameter $b - a$. Man überprüft leicht, dass die Kegel in diesem Fächer alle glatt sind, und damit sind es auch die Hirzebruchflächen. Beachte außerdem, dass $\mathcal{H}_0 \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

3.2. Kegel und Bahnen

Beispiel. Betrachten $\mathbb{P}^2 \cong \mathbb{P}_\Sigma$, wobei Σ der Normalenfächer des Standardsimplex in \mathbb{R}^2 ist, wie in Beispiel 3.1.9. Der Torus $T_N \subset \mathbb{P}^2$ besteht aus den Punkten $(1 : s : t)$, $s, t \in \mathbb{C}^*$. Jeder Punkt $u = (a, b) \in N = \mathbb{Z}^2$ bestimmt die Einparametergruppe

$$\lambda^u: \begin{cases} \mathbb{C}^* & \rightarrow & T_N \\ t & \mapsto & (1 : t^a : t^b) \end{cases} .$$

Wir untersuchen den Grenzwert von $\lambda^u(t)$ für $t \rightarrow 0$.



Quelle: [CLS], §3.2, Figure 6

Die Information in diesem Bild ist schnell analysiert: Für etwa $a, b > 0$ gilt natürlich $\lim_{t \rightarrow 0} (1 : t^a : t^b) = 0$. Ist andererseits z.B. $b < a$ und $b < 0$, so gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1 : t^a : t^b) = \lim_{t \rightarrow 0} (t^{-b} : t^{a-b} : 1) = (0 : 0 : 1).$$

Oder für $a = b < 0$, gilt $\lim_{t \rightarrow 0}(1 : t^a : t^b) = \lim_{t \rightarrow 0}(t^{-a} : 1 : 1) = (0 : 1 : 1)$. Die übrigen Fälle gehen analog. Wir sehen also folgendes: Der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t)$ ist konstant auf den relativen Inneren der Kegel im Normalenfächer Σ . Insbesondere erhalten wir den Normalenkegel aus diesen Grenzwerten zurück.

Weiter sehen wir, dass die Punkte, die als Grenzwerte auftreten gerade ein Vertreter-system für die Bahnen der Operation von T_N auf \mathbb{P}^2 bilden: Die Bahnen der Operation $(t_0 : t_1 : t_2) \cdot (x_0 : x_1 : x_2) = (t_0 x_0 : t_1 x_1 : t_2 x_2)$ hängen gerade genau davon ab, welche der x_i gleich Null sind. Es gibt also genau sieben solche Bahnen (da $(0 : 0 : 0 : 0)$ nicht mitspielt).

Um das für allgemeine torische Varietäten zu analysieren, verwenden wir die Beschreibung von Punkten in affinen torischen Varietäten über Halbgruppenhomomorphismen. Erinnerung/Ergänzung:

- Die Punkte von U_σ stehen in Bijektion mit den Halbgruppenhomomorphismen $S_\sigma \rightarrow (\mathbb{C}, \cdot)$; zu einem Punkt $p \in U_\sigma$ gehört dabei der Halbgruppenhomomorphismus $\sigma^\vee \cap M \ni m \mapsto \chi^m(p)$.
- Zu einem polyedrischen Kegel σ gehört der Punkt

$$m \in S_\sigma \mapsto \begin{cases} 1 & m \in S_\sigma \cap \sigma^\perp \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

von U_σ . Das ist ein Halbgruppenhomomorphismus: Denn sind $m, m' \in S_\sigma$ mit $m + m' \in S_\sigma \cap \sigma^\perp$, so folgt $m, m' \in S_\sigma \cap \sigma^\vee$, da $\sigma^\vee \cap \sigma^\perp$ eine Seite von σ^\vee ist. Wir nennen diesen Punkt den **ausgezeichneten Punkt** von U_σ , geschrieben γ_σ .

- Nach Kor. 1.3.3. ist γ_σ der (eindeutige) Fixpunkt der Toruswirkung von T_N auf U_σ genau dann, wenn σ volldimensional (und damit σ^\vee spitz) ist.
- Ist $\tau \leq \sigma$ eine Seite, so gilt $\gamma_\tau \in U_\sigma$, wegen $\sigma^\perp \subset \tau^\perp$.

Proposition 3.2.2. *Es sei $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ ein spitzer rationaler polyedrischer Kegel und sei $u \in N$. Genau dann gilt $u \in \sigma$, wenn der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t)$ in U_σ existiert. Ist außerdem $u \in \text{Relint}(\sigma)$, so gilt $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t) = \gamma_\sigma$.*

Beweis. Es sei $u \in N$. Zunächst existiert $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t)$ in U_σ genau dann, wenn für alle $m \in S_\sigma$ der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow 0} \chi^m(\lambda^u(t))$ in \mathbb{C} existiert, da die $\chi^m, m \in S_\sigma$, den Koordinatenring $\mathbb{C}[U_\sigma]$ aufspannen. Wegen $\chi^m(\lambda^u(t)) = t^{\langle m, u \rangle}$ ist das genau dann der Fall, wenn $\langle m, u \rangle \geq 0$ für alle $m \in \sigma^\vee \cap M$ gilt, also genau dann, wenn $u \in (\sigma^\vee)^\vee = \sigma$ gilt.

Für $u \in \sigma \cap N$ gehört zu $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t)$ der Halbgruppenhomomorphismus

$$\sigma^\vee \cap M \ni m \mapsto \chi^m(\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} (\chi^m(\lambda^u(t))) = \lim_{t \rightarrow 0} t^{\langle m, u \rangle}.$$

Ist $u \in \text{Relint}(\sigma)$, so gilt $\langle m, u \rangle > 0$ für alle $m \in S_\sigma \setminus \sigma^\perp$ und $\langle m, u \rangle = 0$ für $m \in S_\sigma \cap \sigma^\perp$ (Aufgabe 7). Damit ist $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t)$ genau der ausgezeichnete Punkt u_σ . \square

Beispiel 3.2.3. Es sei $V = \mathbf{V}(xy - zw)$, was wir schon mehrfach betrachtet haben. Dies ist die torische Varietät $V = \text{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma])$ zum Kegel σ mit

$$\sigma^\vee = \text{Cone}(e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2 - e_3).$$

Der Torus von V ist das Bild von

$$(t_1, t_2, t_3) \mapsto (t_1, t_2, t_3, t_1 t_2 t_3^{-1})$$

in $(\mathbb{C}^*)^4$. Zu $u = (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ gehört die Einparametergruppe

$$\lambda^u(t) = (t^a, t^b, t^c, t^{a+b-c}).$$

Offenbar existiert $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t)$ in V genau dann, wenn $a, b, c \geq 0$ und $a + b \geq c$ gelten. Diese Bedingungen beschreiben gerade

$$\sigma = \text{Cone}(e_1, e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3).$$

Dabei ist $u \in \text{Relint}(\sigma)$ genau dann, wenn $a, b, c > 0$ und $a + b > c$ gelten, also $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t) = (0, 0, 0, 0) = \gamma_\sigma$.

Zu jedem $\sigma \in \Sigma$ gehört der ausgezeichnete Punkte $\gamma_\sigma \in U_\sigma \subset X_\Sigma$ und damit eine Bahn

$$O(\sigma) = T_N \cdot \gamma_\sigma \subset X_\Sigma.$$

Wir wollen den im Beispiel \mathbb{P}^2 beschriebenen Zusammenhang zwischen Torusbahnen und ausgezeichneten Punkten im allgemeinen Fall analysieren. Dazu brauchen wir noch etwas Vorbereitung.

Lemma 3.2.4. *Es sei σ ein spitzer rationaler polyedrischer Kegel in $N_{\mathbb{R}}$. Sei $\mathbb{Z}(\sigma \cap N)$ das von $\sigma \cap N$ erzeugte Teilgitter und sei $N(\sigma) = N / (\mathbb{Z}(\sigma \cap N))$.*

(a) *Die Dualität $\langle -, - \rangle: M \times N \rightarrow \mathbb{Z}$ induziert eine perfekte Paarung*

$$\langle -, - \rangle: (\sigma^\perp \cap M) \times N(\sigma) \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

(b) *Sei $T_{N(\sigma)} = N(\sigma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$ der Torus zu $N(\sigma)$. Die Paarung in (a) induziert einen Isomorphismus*

$$T_{N(\sigma)} \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{C}^*),$$

gegeben durch $t \mapsto \varphi_t$, wobei $\varphi_t: (\sigma^\perp \cap M) \rightarrow \mathbb{C}^$, $m \mapsto \chi^m(t)$.*

Beweis. (a) Für $u \in \mathbb{Z}(\sigma \cap N)$ und $m \in \sigma^\perp \cap M$ gilt per Definition $\langle m, u \rangle = 0$. Deshalb induziert die Einschränkung von $\langle -, - \rangle$ auf $(\sigma^\perp \cap M) \times N$ eine Paarung auf $N(\sigma)$. Diese ist perfekt, weil $\mathbb{Z}(\sigma \cap N) = \ker(\alpha)$ für $\alpha: N \rightarrow \text{Hom}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{Z})$, $u \mapsto [m \mapsto \langle m, u \rangle]$ gilt.

(b) Geht so wie in Aufgabe 2. □

Erinnerung: Der Torus T_N operiert auf den Punkten von U_σ aufgefasst als Halbgruppenshomomorphismen wie folgt: Wenn $p \in U_\sigma$ dem Homomorphismus $\gamma_p: S_\sigma \rightarrow \mathbb{C}$ entspricht, dann entspricht $t \cdot p$ dem Homomorphismus

$$\gamma_{t \cdot p}: m \mapsto \chi^m(t) \gamma_p(m).$$

Lemma 3.2.5. *Es sei σ ein spitzer rationaler polyedrischer Kegel in $N_{\mathbb{R}}$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} O(\sigma) &= \{ \gamma: S_\sigma \rightarrow \mathbb{C} \mid \gamma(m) \neq 0 \Leftrightarrow m \in \sigma^\perp \cap M \} \\ &\cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{C}^*) \cong T_{N(\sigma)}. \end{aligned}$$

Beweis. Definiere zunächst

$$O' = \{\gamma: S_\sigma \rightarrow \mathbb{C} \mid \gamma(m) \neq 0 \Leftrightarrow m \in \sigma^\perp \cap M\}.$$

Diese Menge enthält γ_σ und ist unter der oben beschriebenen Wirkung von T_N invariant. (Wir sehen also sofort $O' \subset O(\sigma)$.)

Bemerke weiter, dass $\sigma^\perp \cap M$ eine Untergruppe der Halbgruppe $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ ist. Für $\gamma \in O'$ ist also die Einschränkung von γ auf $S_\sigma \cap \sigma^\perp = \sigma^\perp \cap M$ ein Gruppenhomomorphismus $\sigma^\perp \cap M \rightarrow \mathbb{C}^*$. Umgekehrt erhalten wir aus jedem solchen Gruppenhomomorphismus $\widehat{\gamma}$ einen Halbgruppenhomomorphismus $\gamma \in O'$ durch

$$\gamma(m) = \begin{cases} \widehat{\gamma}(m) & \text{für } m \in \sigma^\perp \cap M \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir haben also $O' \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{C}^*)$. Betrachte nun die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}(\sigma \cap N) \longrightarrow N \longrightarrow N(\sigma) \longrightarrow 0$$

von Gittern. Nach Tensorieren mit \mathbb{C}^* erhalten wir aus Lemma 3.2.4. eine Surjektion

$$T_N = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \rightarrow T_{N(\sigma)} = N(\sigma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{C}^*).$$

Die erhaltene Bijektion $T_{N(\sigma)} \cong O'$ ist außerdem verträglich mit der Operation von T_N . Also operiert T_N (transitiv) auf O' . Wegen $\gamma_\sigma \in O'$ zeigt dies $O' = O(\sigma)$. \square

Damit ist alles bereit für den Hauptsatz über Torusbahnen.

Satz 3.2.6. *Es sei Σ ein Fächer in $N_{\mathbb{R}}$ und X_Σ die zugehörige torische Varietät.*

(a) *Die Zuordnung*

$$\begin{aligned} \Sigma &\longleftrightarrow \{T_N\text{-Bahnen in } X_\Sigma\} \\ \sigma &\longleftrightarrow O(\sigma) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{C}^*) \end{aligned}$$

ist eine Bijektion.

(b) *Für jeden Kegel $\sigma \in \Sigma$ gilt $\dim(O(\sigma)) = \dim N_{\mathbb{R}} - \dim \sigma$.*

(c) *Jede affine Teilmenge der Form U_σ von X_Σ ist Vereinigung von Bahnen, nämlich*

$$U_\sigma = \bigcup_{\tau \leq \sigma} O(\tau).$$

(d) *Es gilt $\tau \leq \sigma$ genau dann, wenn $O(\sigma) \subset \overline{O(\tau)}$. Außerdem gilt*

$$\overline{O(\tau)} = \bigcup_{\tau \leq \sigma} O(\sigma).$$

Dabei ist $\overline{O(\tau)}$ sowohl der Zariski-Abschluss als auch der Abschluss in der klassischen (komplexen) Topologie.

Beweis. (a) Es sei O eine T_N -Bahn in X_Σ . Da X_Σ von den T_N -invarianten Mengen U_σ überdeckt wird und $U_{\sigma_1} \cap U_{\sigma_2} = U_{\sigma_1 \cap \sigma_2}$ gilt, gibt es einen eindeutig bestimmten Kegel $\sigma \in \Sigma$ der minimal ist mit der Eigenschaft $O \subset U_\sigma$. Behaupte, dass $O = O(\sigma)$ gilt, woraus die Behauptung in (a) folgen wird.

Sei dazu $\gamma \in O$. Überlege zunächst, dass es eine Seite $\tau \leq \sigma$ gibt derart, dass

$$\sigma^\vee \cap \tau^\perp \cap M = \{m \in S_\sigma \mid \gamma(m) \neq 0\}$$

gilt. (Denn die Punkte auf der rechten Seite bilden die Gitterpunkte einer Seite von σ^\vee (Check!) und wir wissen, dass jede Seite von σ^\vee die Form $\tau^* = \sigma^\vee \cap \tau^\perp$ für eine Seite τ von σ hat.) Daraus folgt $\gamma \in U_\tau$. (Denn schreibe $S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}m$ mit m wie in 1.3.16. Genau dann setzt $\gamma: S_\sigma \rightarrow \mathbb{C}$ auf S_τ fort und entspricht damit einem Punkt von U_τ , wenn $\tau(m) \neq 0$ gilt.) Damit folgt $\tau = \sigma$ aufgrund der Minimalität von σ . Es gilt also $\{m \in S_\sigma \mid \gamma(m) \neq 0\} = \sigma^\perp \cap M$ und damit $\gamma \in O(\sigma)$ nach Lemma 3.2.5. Da zwei Bahnen entweder gleich oder disjunkt sind, folgt $O(\sigma) = O$.

(b) Unter Verwendung von Lemma 3.2.5 sehen wir $\dim(O(\sigma)) = \dim T_{N(\sigma)} = \text{rk } N(\sigma) = \text{rk } N - \text{rk}(\mathbb{Z}(\sigma \cap N)) = \dim N_{\mathbb{R}} - \dim \sigma$.

(c) Da U_σ invariant unter T_N ist, ist es eine Vereinigung von Bahnen. Ist τ eine Seite von σ , so gilt $O(\tau) \subset U_\tau \subset U_\sigma$. Wie im Beweis von (a) gesehen, hat umgekehrt jede in U_σ enthaltene Bahn die Form $O(\tau)$ für $\tau \leq \sigma$.

(d) Es sei $\overline{O(\tau)}$ der Abschluss von $O(\tau)$ in der klassischen Topologie. Da die Toruswirkung stetig ist, ist $O(\tau)$ eine T_N -invariante Teilmenge von X_Σ und damit eine Vereinigung von Bahnen. Sei $\sigma \in \Sigma$ mit $O(\sigma) \subset \overline{O(\tau)}$. Dann gilt $O(\tau) \subset U_\sigma$; denn andernfalls wäre $O(\tau) \cap U_\sigma = \emptyset$, woraus $\overline{O(\tau)} \cap U_\sigma$ folgen würde (denn U_σ ist offen in der klassischen Topologie). Nach Teil (c) gilt also $\tau \leq \sigma$.

Es sei umgekehrt $\tau \leq \sigma$. Um $O(\sigma) \subset \overline{O(\tau)}$ zu beweisen, genügt es $\overline{O(\tau)} \cap O(\sigma) \neq \emptyset$ zu zeigen. Sei dazu γ_τ der ausgezeichnete Punkt von U_τ , d.h. es gilt $\gamma_\tau(m) = 1$ für $m \in \tau^\perp \cap M$ und sonst $\gamma_\tau(m) = 0$. Zu $u \in \text{Relint}(\sigma)$ und $t \in \mathbb{C}^*$, definiere einen Halbgruppenhomomorphismus $\gamma(t): \mathbb{C}[S_\tau] \rightarrow \mathbb{C}$ durch $\gamma(t) = \lambda^u(t) \cdot \gamma_\tau$. Es gilt $\gamma(t) \in O(\tau)$ für alle $t \in \mathbb{C}^*$, da $O(\tau)$ die Bahn von γ_τ ist. Nach Prop. 3.2.2 existiert der Grenzwert $\gamma(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t)$ in U_σ . Explizit ist $\gamma(t)$ als Halbgruppenhomomorphismus für $m \in \sigma^\vee \cap M$ durch

$$\gamma(t)(m) = \chi^m(\lambda^u(t))\gamma_\tau(m) = t^{\langle m, u \rangle} \gamma_\tau(m).$$

gegeben. Wegen $u \in \text{Relint}(\sigma)$ gilt dabei $\langle m, u \rangle > 0$ für alle $m \in \sigma^\vee \setminus \sigma^\perp$ und $\langle m, u \rangle = 0$ für $m \in \sigma^\perp$. Deshalb entspricht $\gamma(0)$ einem Punkt in $O(\sigma)$. Nach Konstruktion liegt $\gamma(0)$ aber auch in $\overline{O(\tau)}$, womit $O(\sigma) \cap \overline{O(\tau)} \neq \emptyset$ gezeigt ist.

Der Zusatz in (d) ist damit (für die klassische Topologie) ebenfalls bewiesen. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass der klassische Abschluss hier mit dem Zariski-Abschluss übereinstimmt. Für $\sigma' \in \Sigma$ haben wir gerade gesehen, dass $\overline{O(\tau)} \cap U_{\sigma'} \neq \emptyset$ genau dann gilt, wenn $\tau \leq \sigma'$, und nach (c) ist in diesem Fall

$$\overline{O(\tau)} \cap U_{\sigma'} = \bigcup_{\sigma: \tau \leq \sigma \leq \sigma'} O(\sigma).$$

In $U_{\sigma'}$ ist das genau die Teilmenge, die durch das Ideal

$$I = \langle \chi^m \mid m \in (\sigma')^\vee \cap M \setminus \tau^\perp \rangle \subset \mathbb{C}[(\sigma')^\vee \cap M] = \mathbb{C}[S_{\sigma'}]$$

gegeben ist und damit Zariski-abgeschlossen. Denn ist $\gamma \in O(\sigma)$ mit $\tau \leq \sigma \leq \sigma'$, so gilt $\gamma(m) = 0$ genau dann, wenn $m \notin \sigma^\perp \cap M$. Ist also $m \in S_{\sigma'}$, $m \notin \tau^\perp$, so auch $m \notin \sigma^\perp \subset \tau^\perp$ und damit $\gamma(m) = 0$. Also gilt $\gamma \in \mathbf{V}(I)$. Ist umgekehrt $\gamma \in \mathbf{V}(I) \subset U_{\sigma'}$, so bedeutet das

$\gamma(m) = 0$ für alle $m \in S_{\sigma'} \setminus \tau^\perp$. Nach (c) gibt es $\sigma \leq \sigma'$ mit $\gamma \in O(\sigma)$ und wir müssen nur $\tau \subset \sigma$ zeigen. Wäre $\tau \not\subset \sigma$, dann also $\sigma^\perp \not\subset \tau^\perp$ und es gäbe $m \in \sigma^* \cap M$ mit $m \notin \tau^*$ (wobei $\sigma^* = (\sigma')^\vee \cap \sigma^\perp$ wie üblich die duale Seite ist, entsprechend τ^*). Aus $\gamma \in O(\sigma)$ würde dann $\gamma(m) \neq 0$ folgen, aus $\gamma \in \mathbf{V}(I)$ dagegen $\gamma(m) = 0$, Widerspruch. \square

Im Beweis haben wir gesehen, dass die Abschlüsse von Bahnen Zariski-abgeschlossene Untervarietäten sind. Diese haben auch eine torische Struktur: Für $\sigma \in \Sigma$, schreibe

$$V(\sigma) = \overline{O(\sigma)}.$$

Nach Teil (d) in Satz 3.2.6 gilt $\tau \leq \sigma$ genau dann, wenn $O(\sigma) \subset V(\tau)$ und

$$V(\tau) = \bigcup_{\tau \leq \sigma} O(\sigma).$$

Der Torus $O(\tau) = T_{N(\tau)}$ ist dabei eine offene Teilmenge von $V(\tau)$. Für jeden Kegel $\sigma \in \Sigma$ mit $\tau \leq \sigma$, sei $\bar{\sigma}$ das Bild von σ in $N(\tau)_{\mathbb{R}} = (N/(\mathbb{Z}(\tau \cap N)))_{\mathbb{R}}$. Dann ist

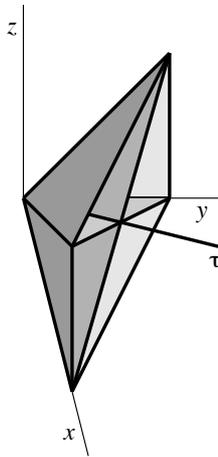
$$\text{Star}(\tau) = \{\bar{\sigma} \subset N(\tau)_{\mathbb{R}} \mid \tau \leq \sigma \in \Sigma\}$$

ein Fächer in $N(\tau)_{\mathbb{R}}$ und es gilt

Proposition 3.2.7. *Für jedes $\tau \in \Sigma$ ist $V(\tau)$ isomorph zur torischen Varietät $X_{\text{Star}(\tau)}$.*

Beweis. Dies folgt aus (a) und (d) in Satz 3.2.6. (Check!) \square

Beispiel. Es sei Σ in \mathbb{R}^3 der im folgenden Bild dargestellte Fächer.



Quelle: [CLS], §3.2, Figure 7

Der Träger von Σ ist $\text{Cone}(e_1, e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3)$, ein alter Bekannter. Der Fächer ist aus dem Kegel durch Unterteilung entlang des Halbstrahls $\tau = \text{Cone}(e_1 + e_2 + e_3)$ entstanden. Ohne das wir sonst etwas über die torische Varietät X_Σ wissen müssten, können wir jetzt folgendes sagen: Nach Satz 3.2.6 hat die Bahn $O(\tau)$ die Dimension 2 in der dreidimensionalen Varietät X_Σ . Nach Prop. 3.2.7 entsteht der Abschluss $V(\tau)$ der Bahn $O(\tau)$ aus dem Bild der angrenzenden vier Kegel, wenn man τ zu einem Punkt kontrahiert. Das entstehende Bild in $N(\tau)_{\mathbb{R}} = (N/N_\tau)_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^2$ gibt dabei den bekannten Fächer von $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Es gilt also $V(\tau) = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Zum Abschluss möchten wir die Korrespondenz zwischen Kegeln und Bahnen noch für den Fall verstehen, dass der Fächer der Normalenfächer eines Polytops ist: Es sei also $P \subset M_{\mathbb{R}}$ ein volldimensionales Gitterpolytop und Σ_P sein Normalenfächer. Darin gehört zu jeder Seite $Q \leq P$ bekanntlich der Kegel

$$\sigma_Q = \text{Cone}(u_F \mid F \text{ Facette von } P \text{ mit } Q \subset F).$$

Was ist der Bahnenabschluss $V(\sigma_Q)$? Es sollte natürlich die torische Varietät X_Q sein. Das stimmt auch, allerdings muss man aufpassen, weil Q für $Q \neq P$ nicht volldimensional in M ist. Darum soll X_Q die torische Varietät bezeichnen, die man erhält, indem man Q so verschiebt, dass der Ursprung eine Ecke ist und $M_{\mathbb{R}}$ durch $\text{span}(Q)$ (und darin M durch $\text{span}(Q) \cap M$) ersetzt. Dann gilt tatsächlich:

Proposition 3.2.9. *Für jede Seite $Q \leq P$ gilt $V(\sigma_Q) \cong X_Q$.*

Beweisskizze. Betrachten P in seiner Facettendarstellung

$$P = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u_F \rangle \geq a_F \text{ für alle Facetten } F < P\}$$

Da wir annehmen, dass der Ursprung eine Ecke von Q ist, enthält jede Facette, die Q enthält, ebenfalls den Ursprung, so dass für diese Facetten $a_F = 0$ gelten muss. Daraus folgt

$$\sigma_Q^\perp = \text{span}(Q)$$

und $N(\sigma_Q)$ ist dual zu $\text{span}(Q) \cap M$. Außerdem gilt $N(\sigma_Q)_{\mathbb{R}} = N_{\mathbb{R}} / \text{span}(\sigma_Q)$. Betrachte nun die torischen Varietäten X_P und X_Q zu den Normalenfächern

$$\begin{aligned} \Sigma_P &= \{\sigma_{Q',P} \subset N_{\mathbb{R}} \mid Q' < P\} \\ \Sigma_Q &= \{\sigma_{Q',Q} \subset N(\sigma_{Q,P})_{\mathbb{R}} \mid Q' < Q\}, \end{aligned}$$

wobei die Notation $\sigma_{Q',P}$ bzw. $\sigma_{Q',Q}$ andeutet, auf welches umgebende Polytop sich die Definition des Kegels $\sigma_{Q'}$ bezieht. Nach Prop. 3.2.7 ist die torische Varietät $V(\sigma_{Q,P})$ gegeben durch den Fächer

$$\begin{aligned} \text{Star}(\sigma_{Q,P}) &= \{\overline{\sigma} \mid \sigma_{Q,P} < \sigma \in \Sigma_P\} \\ &= \{\overline{\sigma_{Q',P}} \mid \sigma_{Q,P} < \sigma_{Q',P} \in \Sigma_P\} = \{\overline{\sigma_{Q',P}} \mid Q' \leq Q\}. \end{aligned}$$

Nun überzeugt man sich noch, dass $\overline{\sigma_{Q',P}} = \sigma_{Q',Q}$ gilt, woraus die Behauptung folgt. \square