Analysis II

Aufgabe 2.4 – Lösung

Wir versehen die Menge

$$X := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < x \leq 1, y = \sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\right\} \cup \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -1 \leq y \leq 1\}$$

mit der euklidischen Metrik des $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass X zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.

Lösung

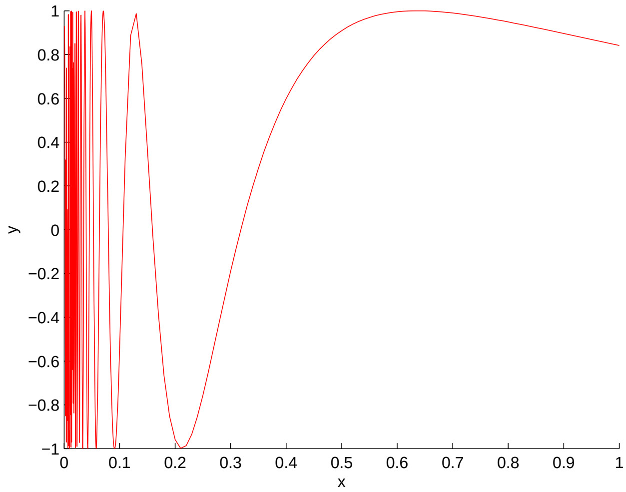

Abbildung 1: Die Menge X

Es gilt der folgende
Hilfssatz: Sei X ein topologischer Raum und sei $A \subset X$ zusammenhänged. Gilt $A \subset B \subset \overline{A}$, so ist auch $\overline{B}$ zusammenhängend.
Beweis: s. Satz 5.8, S. 20, Vorlesungsskript Topologie von Oliver Schnürer:
`http://www.math.uni-konstanz.de/~schnuere/skripte/topo.pdf` $\square$

a) 1. Sei $Y := \{(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)) \,|\, x \in (0,1]\}$. Y ist wegzusammenhängend als Bild des wegzusammenhängenden Intervalls $(0,1]$ bzgl. der stetigen Funktion $x \mapsto (x, \sin\left(\frac{1}{x}\right))$. Insbesondere ist dann Y zusammenhängend nach Satz 10.15 (Kompendium).

2. Wir beweisen, dass $X \subset \overline{Y}$ gilt. Sei $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Cauchyfolge. Da $\mathbb{R}^2$ vollständig ist, konvergiert sie gegen ein $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Dann folgt insbesondere $x_n \to x$. Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

   - $x \in (0,1]$: Ohne Einschränkung sei $(x_n)_n \subset (0,1]$. Sonst wähle eine Teilfolge mit dieser Eigenschaft. Dann muss $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ wegen der Stetigkeit von $(0,1] \ni x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ gelten.
   - $x = 0$: Es folgt $|y| \leq \limsup\limits_{n\to\infty} |y_n| \leq 1$.

   Damit gilt

   $$Y \subset X \subset \overline{Y},$$

   weshalb nach dem Hilfssatz auch X zusammenhängend ist.

b) Angenommen, X wäre wegzusammenhängend, dann gäbe es einen stetigen Weg γ zwischen $\alpha := (1, \sin(1))$ und $\beta := (0,0)$, d. h. $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{C}^0([0,1], X)$ mit $\gamma(0) = \alpha$ und $\gamma(1) = \beta$. Sei

$$t_0 := \min\{t \in [0,1] \mid \gamma(t) = \{0\} \times [-1,1]\} = \min \gamma^{-1}(\{0\} \times [-1,1]),$$

wobei $\gamma^{-1}(\{0\} \times [-1,1])$ beschränkt und abgeschlossen als Urbild einer abgeschlossenen Menge bezüglich einer stetigen Abbildung ist.

Für $t \in [0, t_0)$ gilt $\gamma(t) \in Y$. Weil γ stetig ist und $\gamma(t_0) \in \{0\} \times [-1,1]$ gilt, folgt $\gamma_1(t) \to \gamma_1(t_0) = 0$. Ferner gilt

$$\gamma_2(t) = \sin\left(\tfrac{1}{\gamma_1(t)}\right)$$

für $t \in [0, t_0)$. Also divergiert $\gamma_2(t)$ für $t \to t_0$, was der Bedingung $\gamma(t) \to \gamma(t_0)$ widerspricht.

$\square$