Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dr. Michael Pokojovy

Sommersemester 2012

Analysis II

5. Übungsblatt – Lösungen

Aufgabe 5.1 (4 Punkte)
Sei Q ein Quader im $\mathbb{R}^3$ mit Seitenlängen a, b, c cm und Oberfläche A cm^2.

a) Bestimmen Sie a, b, c so, dass das Volumen V von Q maximal ist.

b) Ist diese Wahl eindeutig?

Lösung Aus geometrischen Gründen gilt $a, b, c > 0$ und $A > 0$.
Für das Volumen V und die Oberfläche S des Quaders Q gilt

$$V(a,b,c) = abc, \quad S(a,b,c) = 2ab + 2ac + 2bc.$$

Wir betrachten also das Optimierungsproblem: Maximiere V über $(a,b,c) \in U := (0,\infty)^3$ unter der Nebenbedingung $S(a,b,c) = A$.
Wir stellen die Lagrangesche Funktion L auf:

$$L \colon U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (a,b,c,\lambda) \mapsto V(a,b,c) + \lambda(S(a,b,c) - A).$$

U ist offen und es gilt $V, S \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, $L \in \mathcal{C}^1(U \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Ferner gilt für $(a,b,c) \in U$

$$\operatorname{rang}\left(\nabla g(a,b,c)\right) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 2(b+c) \\ 2(a+c) \\ 2(b+c) \end{pmatrix} = 1.$$

Unter Beachtung von

$$\begin{aligned}
\partial_a L(a,b,c,\lambda) &= bc + 2\lambda b + 2\lambda c, \\
\partial_b L(a,b,c,\lambda) &= ac + 2\lambda a + 2\lambda c, \\
\partial_c L(a,b,c,\lambda) &= ab + 2\lambda a + 2\lambda b, \\
\partial_\lambda L(a,b,c,\lambda) &= 2ab + 2ac + 2bc - A.
\end{aligned}$$

ergeben sich die Optimalitätsbedingungen $\nabla L = 0$, d. h.

$$\begin{aligned}
bc + 2\lambda(b+c) &= 0, && (1) \\
ac + 2\lambda(a+c) &= 0, && (2) \\
ab + 2\lambda(a+b) &= 0, && (3) \\
2ab + 2ac + 2bc - A &= 0. && (4)
\end{aligned}$$

Wir formen die Gleichung gemäß „(2) - (1), (2) - (3), (1) - (3), 2 ((1) + (2) + (3)) - (4)“ um und finden

$$(b-a)(c+2\lambda)=0, \tag{5}$$
$$(c-b)(a+2\lambda)=0, \tag{6}$$
$$(c-a)(b+2\lambda)=0, \tag{7}$$
$$8\lambda(a+b+c)=-A. \tag{8}$$

Mit (5) folgt:

- $a=b$: Daraus ergibt sich $(c-b)(a+2\lambda)=0$, $(c-a)(a+2\lambda)=0$ und daher
  - $c=a$
  - ODER $\lambda=-\frac{a}{2}$, woraus sich $ac-a(a+c)=0$ und folglich $a=0$ aus (1) ergibt. Widerspruch!
- ODER $\lambda=-\frac{c}{2}$, weshalb wegen (1) $bc-c(b+c)=0$ und daher auch $c=0$ gilt. Widerspruch!

Also ist $a=b=c$. Mit (4) und (8) folgt schließlich $6a^2=A$ und $24\lambda a=-A$ damit

$$a=b=c=\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{6}} \text{ und } \lambda=-\frac{\sqrt{6A}}{24}.$$

Wir rechnen leicht nach, dass die gefundene Lösung (1)–(4) erfüllt. Damit ist $(a^*,b^*,c^*,\lambda^*)=\left(\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{6}},\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{6}},\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{6}},-\frac{\sqrt{6A}}{24}\right)$ die einzige kritische Stelle von L.
Wir setzen die Funktionen V und S auf $\overline{U}$ durch $\tilde{V}\colon \overline{U}\to\mathbb{R}$, $(a,b,c)\mapsto abc$ bzw. $\tilde{S}\colon \overline{U}\to\mathbb{R}$, $(a,b,c)\mapsto 2ab+2ac+2bc$ fort. Die fortgesetzten Funktionen sind stetig und nichtnegativ.
Ferner sei $M:=\{(a,b,c)\in\overline{U}\mid \tilde{S}(a,b,c)=A\}$ und sei $K_n:=M\cap([0,n])^3$, $n\in\mathbb{N}$. Die Funktion $\tilde{V}$ nimmt ihr Maximum im Kompaktum K_n an. Ist $(a,b,c)\in K_n$ ein lokales Extremum von $\tilde{V}$, so folgt:

- $(a,b,c)\in U$. Dann gibt es $\lambda\in\mathbb{R}$ so, dass (a,b,c,λ) eine kritische Stelle der Lagrangeschen Funktion ist. Weil (a^*,b^*,c^*,λ^*) die einzige kritische Stelle von L ist, muss $(a,b,c)=(a^*,b^*,c^*)$ und $V(a,b,c)=\frac{A\sqrt{A}}{6\sqrt{6}}>0$ gelten.
- $(a,b,c)\in\partial([0,n]^3)$. Ist $0\in\{a,b,c\}$, so ist $\tilde{V}(a,b,c)=0$ ein globales Minimum von $\tilde{V}$. Sonst muss $n\in\{a,b,c\}$ gelten. Ohne Einschränkung sei $a=n$. Wegen $2ab+2bc+2ac\le A$ folgt $b\le\frac{A}{2n}$, $c\le\frac{A}{2n}$ und damit

$$\tilde{V}(a,b,c)=abc\le\frac{A^2}{4n}\to 0 \text{ für } n\to\infty.$$

Folglich

$$\sup_{(a,b,c)\in\overline{U}}\tilde{V}(a,b,c)\le\lim_{n\to\infty}\max\left\{\tilde{V}(a^*,b^*,c^*),\frac{A^2}{4n}\right\}=\tilde{V}(a^*,b^*,c^*).$$

Also existiert $\max_{(a,b,c)\in\overline{U}}\tilde{V}(a,b,c)=\tilde{V}(a^*,b^*,c^*)$. Außerdem ist dieses eindeutig, denn: Gäbe es ein weiteres $(a,b,c)\in M$ mit $V(a,b,c)=\frac{A\sqrt{A}}{6\sqrt{6}}$, dann könnte $(a,b,c)\in\partial U$ wegen $V(a,b,c)\neq 0$ nicht gelten. Daher müsste $(a,b,c)\in U\cap S^{-1}(\{A\})$ sein, weshalb (a,b,c) ein kritischer Punkt von L wäre und deshalb mit (a^*,b^*,c^*) übereinstimmen würde.
Da $\tilde{V}$ eine Fortsetzung von V ist und V in (a^*,b^*,c^*), muss (a^*,b^*,c^*) die eindeutige globale Maximalstelle von V sein. $\square$

Aufgabe 5.2 (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ konvex und sei $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Beweisen Sie:

a) Die Menge $M_\alpha = \{x \in \Omega \mid f(x) \leq \alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, ist konvex.

b) Ist $x^* \in \Omega$ ein lokales Minimum von f, so ist es auch ein globales Minimum.

Lösung

a) Seien $x_1, x_2 \in M_\alpha$. Für $t \in [0,1]$ gilt $x_1 + t(x_2 - x_1) \in \Omega$. Ist $x_1 = x_2$ oder $t \in \{0,1\}$, so ist $x_1 + t(x_2 - x_1) \in M_\alpha$. Sonst gilt

$$f(x_1 + t(x_2 - x_1)) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \leq (1-t)\alpha + t\alpha = \alpha.$$

Damit folgt $x_1 + t(x_2 - x_1) \in M_\alpha$, weshalb M_α konvex ist.

b) Sei $x^* \in \Omega$ ein lokales Minimum von f, d. h. es gibt ein $\varepsilon > 0$ so, dass $f(x^*) \leq f(x)$ für alle $x \in B(x^*, \varepsilon) \cap \Omega$ gilt.

Ist x^* kein globales Minimum, so gibt es $y^* \in \Omega$ mit $f(y^*) < f(x^*)$. Für alle $t \in (0,1)$ ist $x^* + t(y^* - x^*) \in \Omega$ und es gilt

$$f(x^* + t(y^* - x^*)) \leq (1-t)f(x^*) + tf(y^*) < (1-t)f(x^*) + tf(x^*) = f(x^*).$$

Wählt man $t \in (0,1)$ so klein, dass $x^* + t(y^* - x^*) \in B(x^*, \varepsilon) \cap \Omega$ gilt, so ergibt sich ein Widerspruch zur lokalen Minimalität von x^*.

$\square$

Aufgabe 5.3 (4 Punkte)

Untersuchen Sie die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad x = (x_1, x_2)' \mapsto x_1^2 - 2x_2^2 + x_1 x_2$$

auf Extrema unter der Nebenbedingung $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Lösung Sei $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und seien $g\colon U \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_1^2 + x_2^2 - 1$, sowie $M := \{x \in U \mid g(x) = 0\}$. Die Funktion f ist stetig und nimmt deshalb ihr Minimum und Maximum auf dem Kompaktum M an.

Die Menge U ist offen. Die Funktionen f und g sind stetig differenzierbar. Ferner gilt

$$\operatorname{rang}(\nabla g(x)) = \operatorname{rang}(2x) = 1$$

für alle $x \in U$. Daher muss jedes Extremum von f in M eine kritische Stelle der Lagrangeschen Funktion

$$L\colon U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, \lambda) \mapsto f(x) + \lambda g(x)$$

sein. Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2\lambda x_1 &= 0, \\ -4x_2 + x_1 + 2\lambda x_2 &= 0, \\ x_1^2 + x_2^2 &= 1, \end{aligned}$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit x_2, die zweite mit x_1 und zieht die zweite Gleichung von der ersten ab, so ergibt sich

$$6x_1 x_2 + x_2^2 - x_1^2 = 0.$$

Unter Verwendung der Nebenbedingung bekommen wir $x_2 = \pm\sqrt{1 - x_1^2}$ für $x_1 \in [-1, 1]$ und damit

$$\pm 6x_1\sqrt{1 - x_1^2} + 1 - 2x_1^2 = 0.$$

Quadriert man die Gleichung, so folgt

$$36x_1^2(1 - x_1^2) - (1 - 2x_1^2)^2 = 0,$$

woraus sich die Lösungen $x_1 \in \left\{\pm\sqrt{1/2 - \sqrt{9/40}}, \pm\sqrt{1/2 + \sqrt{9/40}}\right\} \subset [-1, 1]$ ergeben. Die Nebenbedingung liefert dann $x_2 = \pm\sqrt{1 - x_1^2}$.
Dividiert man die erste Gleichung durch x_1, die zweite durch x_2, so ergibt sich

$$2 + \frac{x_2}{x_1} + 2\lambda = 0, \quad -4 + \frac{x_1}{x_2} + 2\lambda = 0$$

und damit

$$-2 - \frac{x_2}{x_1} = 2\lambda = 4 - \frac{x_1}{x_2}.$$

Durch Ausprobieren der acht möglichen Kombinationen, bekommen wir die kritischen Stellen

$$(x_1^*, x_2^*, \lambda_1^*) = \left(\sqrt{1/2 + \sqrt{9/40}}, \sqrt{1/2 - \sqrt{9/40}}, 1 - \sqrt{10}\right),$$
$$(y_1^*, y_2^*, \lambda_2^*) = \left(-\sqrt{1/2 - \sqrt{9/40}}, \sqrt{1/2 + \sqrt{9/40}}, 1 + \sqrt{10}\right),$$
$$(u_1^*, u_2^*, \lambda_3^*) = \left(-\sqrt{1/2 + \sqrt{9/40}}, -\sqrt{1/2 - \sqrt{9/40}}, 1 - \sqrt{10}\right),$$
$$(v_1^*, v_2^*, \lambda_4^*) = \left(\sqrt{1/2 - \sqrt{9/40}}, -\sqrt{1/2 + \sqrt{9/40}}, 1 + \sqrt{10}\right).$$

Funktion $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_1x_2$

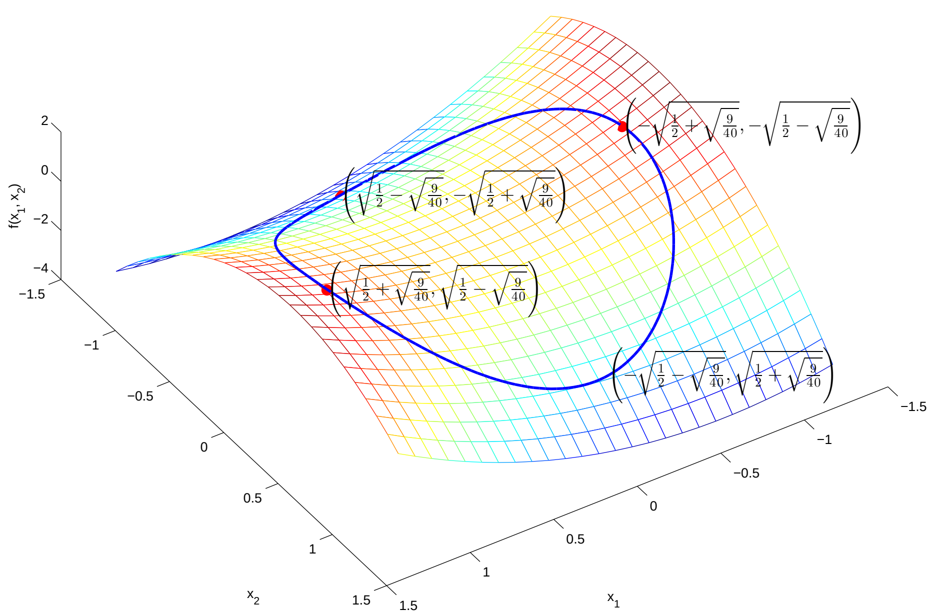

Abbildung 1

Wertet man die Funktion an den kritischen Stellen aus, so folgt wegen

$$f(x_1^*, x_2^*) = f(u_1^*, u_2^*) = -\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{10}) > -\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{10}) = f(y_1^*, y_2^*) = f(v_1^*, v_2^*),$$

dass es sich bei (x_1^*, x_2^*), (u_1^*, u_2^*) bzw. (y_1^*, y_2^*), (v_1^*, v_2^*) um globale Maxima bzw. Minima handelt. Weitere Extrema gibt es nicht. $\square$