Analysis II

Aufgabe 7.2 – Lösung

Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ und sei $x \in \Gamma$. Beweisen Sie:

a) $T_x\Gamma$ ist im Allgemeinen kein Vektorraum.

b) Lässt sich Γ durch ein $\gamma\colon U \to \Gamma$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, als eine m-Fläche (eindeutig) darstellen, so gilt $T_{\gamma(u)}\Gamma = \{\gamma'(u)h \mid h \in \mathbb{R}^m\}$ für $u \in U$.

Lösung

a) Wir betrachten die Menge $\Gamma := \big((-1,1) \times \{0\}\big) \cup \big(\{0\} \times (-1,1)\big)$. Es gilt $(1,0),(0,1) \in T_{(0,0)}\Gamma$, denn es gibt $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}^1((-1,1),\Gamma)$,

$$\gamma_1\colon t \mapsto (t,0), \quad \gamma_2\colon t \mapsto (0,t),$$

mit $\gamma_1(0) = (0,0) = \gamma_2(0)$ und $\dot\gamma_1(0) = (1,0)$, $\dot\gamma_2(0) = (0,1)$.

Andererseits ist $(1,1) = (1,0) + (0,1)$ kein Element von $T_{(0,0)}\Gamma$. Angenommen, es gäbe ein $\gamma \in \mathcal{C}^1((-\varepsilon,\varepsilon),\Gamma)$ mit $\gamma(0) = (0,0)$ und $\dot\gamma(0) = (1,1)$. Wegen der Stetigkeit von $\dot\gamma$ gäbe es dann zu jedem $\delta > 0$ ein $\tilde t \in (0,\varepsilon)$ so, dass

$$|\dot\gamma_i(t) - \dot\gamma_i(0)| < \delta \Leftrightarrow |\dot\gamma_i(t) - 1| < \delta \Rightarrow \dot\gamma_i(t) > 1 - \delta$$

für $i = 1,2$ und alle $t \in (-\tilde t, \tilde t)$. Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung würde dann

$$\gamma_i(t) = \gamma_i(t) - \gamma_i(0) = \int_0^t \dot\gamma_i(s)\mathrm{d}s > (1-\delta)t$$

für $i = 1,2$ und alle $t \in (-\tilde t, \tilde t)\backslash\{0\}$ gelten. Wählt man $\delta = \frac{1}{2}$, so folgt für $t \in (0,\tilde t)$

$$\gamma_i(t) > 0,$$

was einen Widerspruch zu $\gamma_1(t) \in \{0,1\}$ oder $\gamma_2 \in \{0,1\}$ und daher zu $\gamma(t) \in \Gamma$ darstellt.

b) Sei $u \in U$ mit $\gamma(u) = x$.

- Zunächst zeigen wir, dass $\{\gamma'(u)h \mid h \in \mathbb{R}^m\} \subset T_x\Gamma$ gilt.
  Sei $h \in \mathbb{R}^m$. Da U offen ist, gibt es $\delta > 0$ mit $B(u,\delta) \subset U$. Wir definieren die Kurve

  $$\varphi\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to U, \quad t \mapsto u + th, \text{ wobei } \varepsilon := \begin{cases} \frac{\delta}{|h|}, & h \neq 0, \\ 1, & h = 0. \end{cases}$$

  Ferner betrachten wir die Kurve

  $$\psi\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to \Gamma, \quad t \mapsto \gamma(\varphi(t)).$$

  Für diese gilt $\psi \in \mathcal{C}^1((-\varepsilon,\varepsilon),\Gamma)$ und

  $$\psi(0) = \gamma(\varphi(0)) = \gamma(u) = x \text{ sowie } \dot\psi(0) = \gamma'(\varphi(0))\dot\varphi(0) = \gamma'(u)h.$$

  Also $\gamma'(u)h \in T_x\Gamma$.

- Sei $t \in T_x$ und sei $x = \gamma(u^*)$. Dann gibt es ein $\varphi \in \mathcal{C}^1((-\varepsilon, \varepsilon), \Gamma)$ mit $\varphi(0) = x$ und $\dot{\varphi}(0) = t$.

  Zu $u \in U$ betrachten wir die Spaltenvektoren von $\gamma'(u)$. Da $\operatorname{rang} \gamma'(u) = m$ ist, muss es m Indizes $i_1, \ldots, i_m$ so geben, dass $\det \begin{pmatrix} \gamma_{i_1 1} & \cdots & \gamma_{i_1 m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{i_m 1} & \cdots & \gamma_{i_m m} \end{pmatrix} \neq 0$ gilt. Für $u = u^*$ sei ohne Einschränkung $\{i_1, \ldots, i_m\} = \{1, \ldots, m\}$.

  Die Matrix

$$V(u) := \left(\gamma'(u) \,\middle|\, W \right) := \left(\begin{array}{ccc|ccc} \gamma_{1\,1} & \cdots & \gamma_{1\,m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m\,1} & \cdots & \gamma_{m\,m} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \gamma_{m+1\,1} & \cdots & \gamma_{m+1\,m} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n\,1} & \cdots & \gamma_{n\,m} & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right)(u)$$

  hat den vollen Rang für $u \in B(u^*, \delta)$. Wir definieren ferner die Abbildung

$$\tilde{\gamma}\colon B(u^*, \delta) \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n, \quad \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \ni (u, v) \mapsto \gamma(u) + Wv.$$

  Diese ist stetig differenzierbar und es gilt

$$\tilde{\gamma}'(u^*, 0) = \begin{pmatrix} \gamma'(u^*) & W \end{pmatrix},$$

  weshalb $\tilde{\gamma}'(u^*, 0)$ invertierbar ist. Nach dem Satz über Inverse Funktion gibt es eine Umgebung $B((u^*, 0), \delta) \subset U \times \mathbb{R}^{n-m}$ von $(u^*, 0)$ so, dass $\tilde{\gamma}|_{U_{u^*}}$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus ist.

  Wir betrachten für $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ die Gleichung

$$\varphi(s) = \gamma(y).$$

  Da γ injektiv ist, kann man diese durch ein $\hat{\varphi}\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ eindeutig auflösen. Nun gilt

$$\varphi(s) = \gamma(\hat{\varphi}(s)) = \tilde{\gamma}(\hat{\varphi}(s), 0).$$

  Da $\tilde{\gamma}$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus ist, folgt

$$\begin{pmatrix} \hat{\varphi}(s) \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{\gamma}^{-1}(\varphi(s)) \text{ und } \begin{pmatrix} \dot{\hat{\varphi}}(0) \\ 0 \end{pmatrix} = (\tilde{\gamma}'(\tilde{\gamma}^{-1}(\varphi(0))))^{-1}\dot{\varphi}(0).$$

  Schließlich bekommen wir

$$\begin{aligned} t = \dot{\varphi}(0) &= \tilde{\gamma}'(\tilde{\gamma}^{-1}(\varphi(0))) \begin{pmatrix} \dot{\hat{\varphi}}(0) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \tilde{\gamma}'(u^*, 0) \begin{pmatrix} \dot{\hat{\varphi}}(0) \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma'(u^*)\dot{\hat{\varphi}}(0) \in \{\gamma'(u^*)h \mid h \in \mathbb{R}^n\}. \end{aligned}$$

$\square$

Analysis II

Aufgabe 7.3 – Lösung

Gegeben sei die Menge

$$T := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2 \right\},$$

wobei $0 < r < R$ fest sind.

a) Skizzieren Sie die Menge T.

b) Finden Sie zwei glatte Kurven $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathbb{R}^3$ so, dass $T \backslash (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ sich als eine 2-Fläche darstellen lässt.

Lösung

a) Um die Fläche geometrisch besser zu verstehen, kann man diese für $z \in \mathbb{R}$ mit der Ebene $\mathbb{R}^2 \times \{z\}$ schneiden. Für $|z| > r$ ergibt sich die leere Menge, für $z = r$ – ein Kreis um $(0, 0, z)$ mit dem Radius R, für $|z| < r$ – zwei konzentrische Kreise um $(0, 0, z)$ mit den Radien $R \pm \sqrt{r^2 - z^2}$.

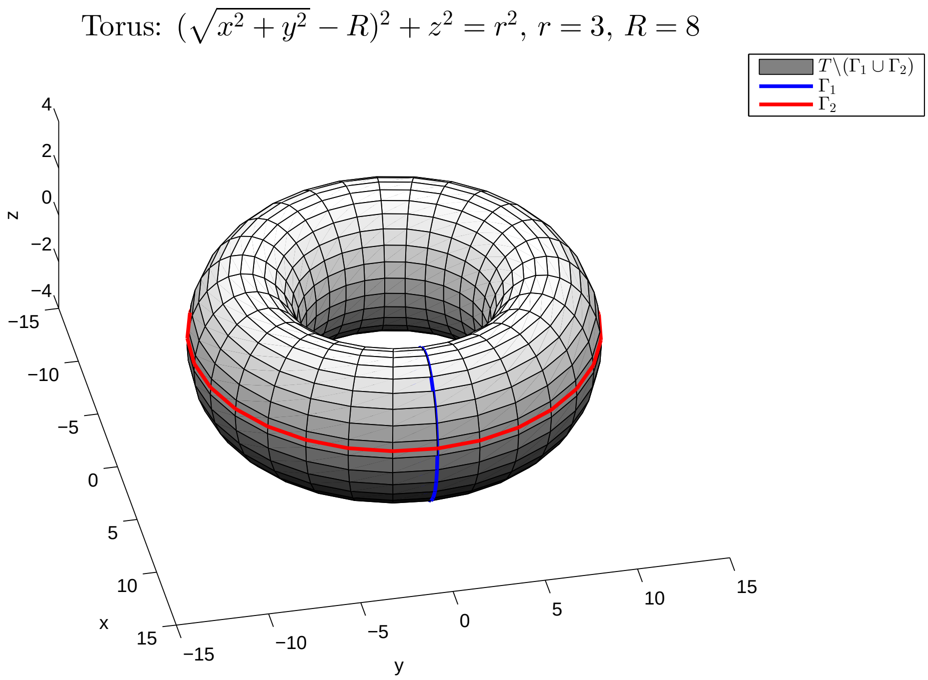

Abbildung 2

b) Wir betrachten die Abbildung

$$\tilde{\gamma} \colon [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad (\varphi, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} (R + r\cos(\theta))\cos(\varphi) \\ (R + r\cos(\theta))\sin(\varphi) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

- Es gilt $\tilde{\gamma}([0,2\pi]\times[0,2\pi])\subset T$, denn:

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{\tilde{\gamma}_1^2(\varphi,\theta)+\tilde{\gamma}_2^2(\varphi,\theta)}-R\right)^2+\tilde{\gamma}_3^2(\varphi,\theta)\\&\quad=\left(\sqrt{(R+r\cos(\theta))^2(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi))}-R\right)^2+r^2\sin^2(\theta)\\&\quad=(R+r\cos(\theta)-R)^2+r^2\sin^2(\theta)=r^2,\end{aligned}$$

  weil $R+r\cos(\theta)>0$ wegen $|r\cos(\theta)|\le r<R$ gilt.
- Unter Beachtung von

$$\tilde{\gamma}'(\varphi,\theta)=\begin{pmatrix}-(R+r\cos(\theta))\sin(\varphi) & -r\sin(\theta)\cos(\varphi)\\ (R+r\cos(\theta))\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi)\\ 0 & r\cos(\theta)\end{pmatrix}$$

  folgt

$$\begin{aligned}&\det\begin{pmatrix}-(R+r\cos(\theta))\sin(\varphi) & -r\sin(\theta)\cos(\varphi)\\ (R+r\cos(\theta))\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi)\end{pmatrix}\\&=r(R+r\cos(\theta))(\sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi))\sin(\theta)=r(R+r\cos(\theta))\sin(\theta)\neq 0\end{aligned}$$

  für $\theta\notin\{0,\pi,2\pi\}$ sowie

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}-(R\pm r)\sin(\varphi) & 0\\ 0 & \pm r\end{pmatrix}&=\mp r(R\pm r)\sin(\varphi),\\ \det\begin{pmatrix}(R\pm r)\cos(\varphi) & 0\\ 0 & \pm r\end{pmatrix}&=\pm r(R\pm r)\cos(\varphi)\end{aligned}$$

  für $\theta\in\{0,\pi,2\pi\}$ und damit $\operatorname{rang}\tilde{\gamma}'=2$.
- Wir zeigen nun, dass $\tilde{\gamma}\colon[0,2\pi]\times[0,2\pi]\to T$ surjektiv ist. Sei $(x,y,z)\in T$. Dann gilt $(x,y,z)\in T$ genau dann, wenn $R-r\le\sqrt{x^2+y^2}\le R+r$ und $z^2=r^2+(\sqrt{x^2+y^2}-R)^2$.
  Sei $(x,y,z)\in T$. Wir suchen $\varphi,\theta\in[0,2\pi)$ mit

$$\begin{aligned}(R+r\cos(\theta))\cos(\varphi)&=x,\\(R+r\cos(\theta))\sin(\varphi)&=y,\\r\sin(\theta)=z&=\pm\sqrt{r^2+(\sqrt{x^2+y^2}-R)^2}.\end{aligned}$$

  Dies ist dazu äquivalent, dass

$$\begin{aligned}(R+r\cos(\theta))\cos(\varphi)&=x,\\(R+r\cos(\theta))\sin(\varphi)&=y,\\r^2\sin^2(\theta)&=r^2+(\sqrt{x^2+y^2}-R)^2\end{aligned}$$

  mit $\theta\in[0,\pi]$ für $z\ge 0$ und $\theta\in(\pi,2\pi)$ für $z<0$. Setzt man die ersten zwei Gleichungen in die dritte Gleichung ein, so ergibt sich das äquivalente Problem

$$\begin{aligned}(R+r\cos(\theta))\cos(\varphi)&=x,\\(R+r\cos(\theta))\sin(\varphi)&=y,\\r^2\sin^2(\theta)&=r^2+(\sqrt{(R+r\cos(\theta))^2}-R)^2=r^2+r^2\cos^2(\theta)\end{aligned}$$

mit $\theta \in [0, \pi]$ für $z \geq 0$ und $\theta \in (\pi, 2\pi)$ für $z < 0$, weshalb die dritte Gleichung immer trivialerweise erfüllt ist. Daher betrachten wir das äquivalente System

$$\begin{aligned}(R + r\cos(\theta))\cos(\varphi) &= x,\\ (R + r\cos(\theta))\sin(\varphi) &= y\end{aligned}$$

mit $\theta \in [0, \pi]$ für $z \geq 0$ und $\theta \in (\pi, 2\pi)$ für $z < 0$.
Stellt man x und y in den Polarkoordinaten dar, so folgt die äquivalente Gleichung

$$\begin{aligned}R + r\cos(\theta) &= \sqrt{x^2 + y^2},\\ \varphi &= \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & y \geq 0,\\ 2\pi - \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & y < 0.\end{cases}\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\theta &= \begin{cases} \arccos\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}-R}{r}\right), & z \geq 0,\\ 2\pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}-R}{r}\right), & z < 0,\end{cases}\\ \varphi &= \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & y \geq 0,\\ 2\pi - \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & y < 0.\end{cases}\end{aligned}$$

- Wir definieren die Abbildung $\gamma := \tilde{\gamma}|_{(0,2\pi)\times(0,2\pi)}$. Für diese gilt $\operatorname{rang}\gamma' = 2$. Unter Beachtung von $\tilde{\gamma}(0,\cdot) = \tilde{\gamma}(2\pi,\cdot)$ und $\tilde{\gamma}(\cdot,0) = \tilde{\gamma}(\cdot,2\pi)$ folgt die Surjektivität von $\gamma\colon (0,2\pi)\times(0,\pi) \to T\backslash(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$, denn

$$\gamma((0,2\pi)\times(0,2\pi)) = \tilde{\gamma}([0,2\pi]\times[0,2\pi])\backslash\tilde{\gamma}(\partial([0,2\pi]\times[0,2\pi])) = T\backslash(\Gamma_1 \cup \Gamma_2).$$

  Die Injektivität von γ ist klar.

$\square$