

Sommersemester 2012

## Analysis II

### 12. Übungsblatt – Lösungen

#### Aufgabe 12.1

(4 Punkte)

Für  $r, h > 0$  seien die Menge  $U := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x| < r\}$  und die Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto h \left(1 - \frac{|x|}{r}\right)$ , definiert. Zeigen Sie, dass  $S = \text{graph } f$  eine 2-Fläche ist, und berechnen Sie den Flächeninhalt  $A(S)$  von  $S$ .

**Lösung** Die Menge  $U$  ist offen. Die Funktion  $\gamma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $x \mapsto (x, f(x))^T$ , ist als Verknüpfung stetig differenzierbarer Funktionen stetig differenzierbar. Ferner gilt

$$\gamma'(x) = \begin{pmatrix} I_{2 \times 2} \\ f'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{hx_1}{r|x|} & -\frac{hx_2}{r|x|} \end{pmatrix}$$

und damit  $\text{rang } \gamma' \equiv 2$ . Also ist  $S = \gamma(U)$  eine 2-Fläche.

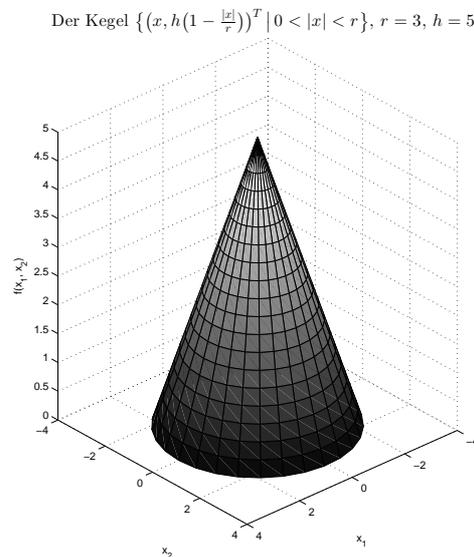


Abbildung 1

Nach Beispiel 13.60 gilt

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_S 1 dA = \int_U \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2} dx = \int_U \sqrt{1 + \frac{h^2 x_1^2}{r^2 |x|^2} + \frac{h^2 x_2^2}{r^2 |x|^2}} = \int_{B(0,r)} \sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2}} dx \\ &= \lambda_2(B(0,r)) \sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2}} = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}, \end{aligned}$$

wobei  $\lambda_2(U) = \lambda_2(B(0,r))$ , da  $\{0\}$  eine Nullmenge ist. □

**Aufgabe 12.2**

(4 Punkte)

Beweisen Sie:  $\int_{\Omega} \operatorname{div} F(x) dx = \int_{\partial\Omega} \langle F(x), n(x) \rangle dA(x)$ , indem Sie beide Integrale explizit berechnen, wobei  $\Omega := (0, 3) \times (0, 2)$  und  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto \begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$ . Hierbei ist  $n(x)$  für  $x \in \partial\Omega$  stets der nach außen gerichtete Einheitsnormalenvektor zur Oberfläche  $\partial\Omega$  am Punkt  $x$ .

**Lösung**  $F$  ist ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit  $\operatorname{div} F(x) = 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}^3$ .  $\Omega$  ist eine Borel-Menge mit  $\lambda_2(\Omega) = 6$ . Damit folgt

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F(x) dx = \lambda_2(\Omega) = 6.$$

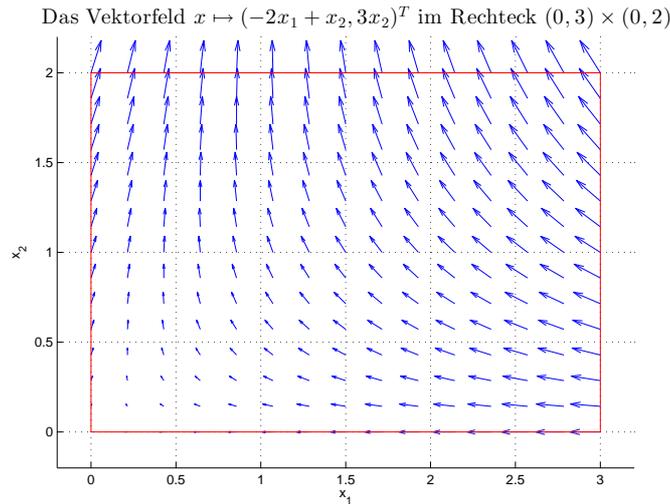


Abbildung 2

$\Omega$  ist offen, (weg)zusammenhängend (da konvex) und stückweise glatt berandet. Damit existiert für alle  $x \in \partial\Omega$  (bis auf endlich viele Ausnahmen) der äußere Einheitsnormalenvektor  $n(x)$ , welcher sich für  $x \in \Gamma_i$  als  $n(x) = \nabla\psi_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , mit

1.  $x \in \Gamma_1 := (0, 3) \times \{0\}$ :  $\psi_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \langle x - (0, 0)^T, (0, -1)^T \rangle$ , also  $n(x) = (0, -1)^T =: n_1$ ,
2.  $x \in \Gamma_2 := \{3\} \times (0, 2)$ :  $\psi_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \langle x - (3, 0)^T, (1, 0)^T \rangle$ , also  $n(x) = (1, 0)^T =: n_2$ ,
3.  $x \in \Gamma_3 := (0, 3) \times \{2\}$ :  $\psi_3: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \langle x - (3, 2)^T, (0, 1)^T \rangle$ , also  $n(x) = (0, 1)^T =: n_3$ ,
4.  $x \in \Gamma_4 := \{0\} \times (0, 2)$ :  $\psi_4: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \langle x - (0, 2)^T, (-1, 0)^T \rangle$  also  $n(x) = (-1, 0)^T =: n_4$ ,

ergibt, wobei jeweils  $\psi_i(x) = 0$  für  $x \in \Gamma_i$  und  $\psi_i(x) < 0$  für  $x \in \Omega$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , gilt. Außerdem gilt  $\Gamma_i = \operatorname{im} \gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , wobei

1.  $\gamma_1: (0, 3) \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, 0)^T$ ,
2.  $\gamma_2: (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (3, t)^T$ ,
3.  $\gamma_3: (0, 3) \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (3 - t, 2)^T$ ,
4.  $\gamma_4: (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (0, 2 - t)^T$

glatte Kurven mit  $|\gamma_i'| = 1$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , sind.

Damit folgt

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial\Omega} \langle F(x), n(x) \rangle dA(x) &= \sum_{i=1}^4 \int_{\Gamma_i} \langle F(\gamma_i(t)), n(\gamma_i(t)) \rangle |\gamma'(t)| dt = \sum_{i=1}^4 \int_{\Gamma_i} \langle F(\gamma_i(t)), n_i \rangle dt \\
 &= \int_0^3 \langle (-2t, 0)^T, (0, -1)^T \rangle dt + \int_0^2 \langle (-6+t, 3t)^T, (1, 0)^T \rangle dt + \\
 &\quad \int_0^3 \langle (-4+2t, 6)^T, (0, 1)^T \rangle dt + \int_0^2 \langle (2-t, 6-3t)^T, (-1, 0)^T \rangle dt \\
 &= \int_0^2 (-6+t) dt + \int_0^3 6 dt + \int_0^2 (t-2) dt \\
 &= (-6t + \frac{t^2}{2}) \Big|_{t=0}^{t=2} + 6t \Big|_{t=0}^{t=3} + (\frac{t^2}{2} - 2t) \Big|_{t=0}^{t=2} = -10 + 18 - 2 = 6.
 \end{aligned}$$

Dies beendet den Beweis. □

### Aufgabe 12.3

(4 Punkte)

Seien  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ ,  $\sigma, \varepsilon \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^{2 \times 2})$  das Verschiebungs-, Spannungs- bzw. Verzerrungsvektorfeld eines den Bereich  $\Omega := \mathbb{R}^2$  belegenden elastischen Festkörpers. Sei  $f \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}^2)$  eine auf den Körper wirkende Volumenkraft und seien  $\lambda, \mu > 0$  die Lamé-Konstanten. Es gelte:

- i)  $\varepsilon(x) = \frac{1}{2}(\nabla u(x) + (\nabla u(x))^T)$ ,  $x \in \Omega$  (Green-Lagrangescher Verzerrungstensor),
- ii)  $\sigma(x) = 2\mu\varepsilon(x) + \lambda \operatorname{spur}(\varepsilon(x))I_2$  (Hookesches Gesetz für homogene, isotrope Medien),
- iii)  $\int_{\partial\Omega'} \sum_{j=1}^2 \sigma_{ij}(x)n_j(x)dA(x) + \int_{\Omega'} f_i(x)dx = 0$  für  $i = 1, 2$  und alle beschränkten, glatt berandeten Gebiete  $\Omega' \subset \Omega$  (Gleichgewichtsbedingung).

Beweisen Sie die nachstehenden Identitäten:

- a)  $\varepsilon(x) = (\varepsilon(x))^T$ ,  $\sigma(x) = (\sigma(x))^T$ ,  $x \in \Omega$  (Symmetrie der beiden Tensoren),
- b)  $-\operatorname{div} \sigma(x) = f(x)$ ,  $x \in \Omega$  (Erhaltungsgesetz),  
*Hinweis:* Wählen Sie  $\Omega' = B(x, \varepsilon)$  und wenden Sie die Aufgabe 9.2 b) an.
- c)  $-\mu\Delta u(x) - (\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} u(x) = f(x)$ ,  $x \in \Omega$  (Lamé-Gleichungen),

wobei  $\nabla u := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} u_1 & \partial_{x_1} u_2 \\ \partial_{x_2} u_1 & \partial_{x_2} u_2 \end{pmatrix}$ ,  $\operatorname{div} \sigma := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \sigma_{11} + \partial_{x_2} \sigma_{21} \\ \partial_{x_1} \sigma_{12} + \partial_{x_2} \sigma_{22} \end{pmatrix}$  und  $\Delta u := \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{pmatrix}$ .

*Hinweis:* Lassen Sie sich von der „Physik“ nicht abschrecken!

### Lösung

- a)  $\varepsilon(x)$ ,  $\sigma(x)$  sind symmetrisch für  $x \in \Omega$ , denn

$$\begin{aligned}
 (\varepsilon(x))^T &= \frac{1}{2}((\nabla u(x))^T + \nabla u(x)) = \frac{1}{2}(\nabla u(x) + (\nabla u(x))^T) = \varepsilon(x), \\
 (\sigma(x))^T &= 2\mu(\varepsilon(x))^T + \lambda \operatorname{spur}(\varepsilon(x))(I_2)^T = 2\mu\varepsilon(x) + \lambda \operatorname{spur}(\varepsilon(x))I_2 = \sigma(x).
 \end{aligned}$$

- b) Sei  $x_0 \in \Omega$  und sei  $\Omega' := B(x_0, \delta)$ ,  $\delta > 0$ . Dann ist  $\Omega'$  ein glatt berandetes Gebiet mit  $\sigma \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}', \mathbb{R}^{2 \times 2})$ ,  $f \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}', \mathbb{R}^2)$  und es folgt unter Benutzung der Symmetrie von  $\sigma$  sowie des Gaußschen Integralsatzes

$$\int_{\partial\Omega'} \sum_{j=1}^2 \sigma_{ij}(x)n_j(x)dA(x) = \int_{\partial\Omega'} \sum_{j=1}^2 \sigma_{ji}(x)n_j(x)dA(x) = \int_{\Omega'} \sum_{j=1}^2 \partial_{x_j} \sigma_{ji}(x)dx$$

für  $i = 1, 2$ . Damit haben wir

$$\int_{\Omega'} \left( \sum_{j=1}^2 \partial_{x_j} \sigma_{ji}(x) - f_i(x) \right) dx = 0$$

bewiesen. Da nun der Integrand nach Voraussetzung stetig ist, folgt mit Aufgabe 9.2 b)

$$\sum_{j=1}^2 \partial_{x_j} \sigma_{ji}(x_0) = f_i(x_0)$$

und damit auch

$$-\operatorname{div} \sigma(x) = f(x)$$

für alle  $x \in \Omega$ .

c) Setzt man  $i)$  in  $ii)$  ein, so findet man für  $x \in \Omega$

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \mu(\nabla u(x) + (\nabla u(x))^T) + \lambda \operatorname{spur}(\nabla u(x)) I_2 \\ &= \begin{pmatrix} 2\mu u_{1,x_1} + \lambda(u_{1,x_1} + u_{2,x_2}) & \mu(u_{1,x_2} + u_{2,x_1}) \\ \mu(u_{1,x_2} + u_{2,x_1}) & 2\mu u_{2,x_2} + \lambda(u_{1,x_2} + u_{2,x_1}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ferner gilt

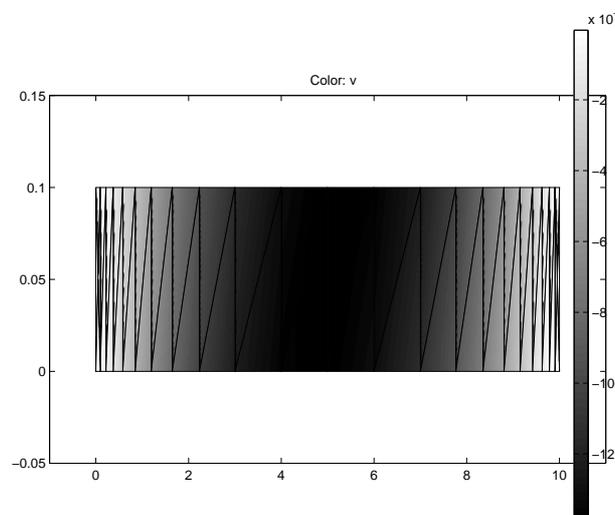
$$\begin{aligned} \operatorname{div} \sigma &= \begin{pmatrix} 2\mu u_{1,x_1x_1} + \lambda(u_{1,x_1x_1} + u_{2,x_2x_1}) + \mu(u_{1,x_2x_2} + u_{2,x_1x_2}) \\ \mu(u_{1,x_2x_1} + u_{2,x_1x_1}) + 2\mu u_{2,x_2x_2} + \mu(u_{1,x_2x_2} + u_{2,x_1x_2}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mu \Delta u_1 + (\lambda + \mu)(u_{1,x_1x_1} + u_{2,x_2x_1}) \\ \mu \Delta u_2 + (\lambda + \mu)(u_{1,x_1x_2} + u_{2,x_2x_2}) \end{pmatrix} = \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u. \end{aligned}$$

Mit b) folgt schließlich

$$-\mu \Delta u(x) - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u(x) = f(x) \text{ für } x \in \Omega.$$

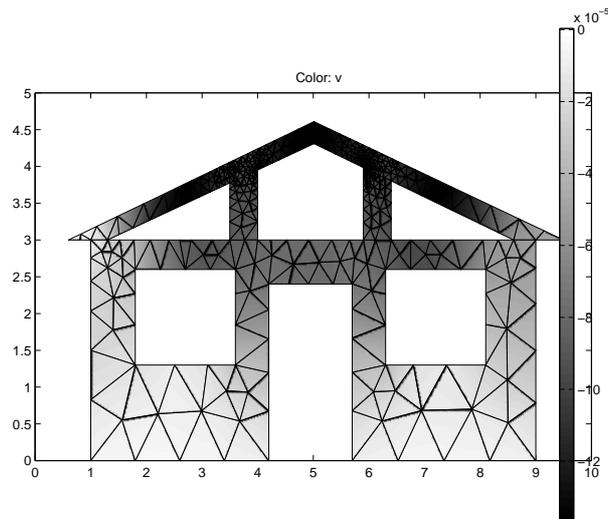
Nachstehend werden einige Anwendungsbeispiele aus der Technischen Mechanik vorgestellt. Wir beschränken uns ausschließlich auf homogene, isotrope Stoffe. Diese werden durch die Dichte  $\rho$  [kg/m<sup>3</sup>], den Elastizitätsmodul  $E$  [GPa] sowie die Poissonzahl  $\nu \in (0, \frac{1}{2})$  charakterisiert, womit sich auch die Lamé-Konstanten  $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  und  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$  berechnen lassen.

**Beispiel 1:** Wir betrachten eine plattenförmige Stahlbrücke<sup>1</sup> mit den Abmessungen 10 m  $\times$  0,1 m  $\times$  1 m, welche nur am linken und am rechten Rand befestigt ist. Die Brücke befinde sich im Gravitationsfeld der Erde. Die folgende Abbildung zeigt die Brücke im deformierten Zustand, wobei die Farbintensität der Verschiebung eines jeden Punktes in  $y$ -Richtung entspricht.

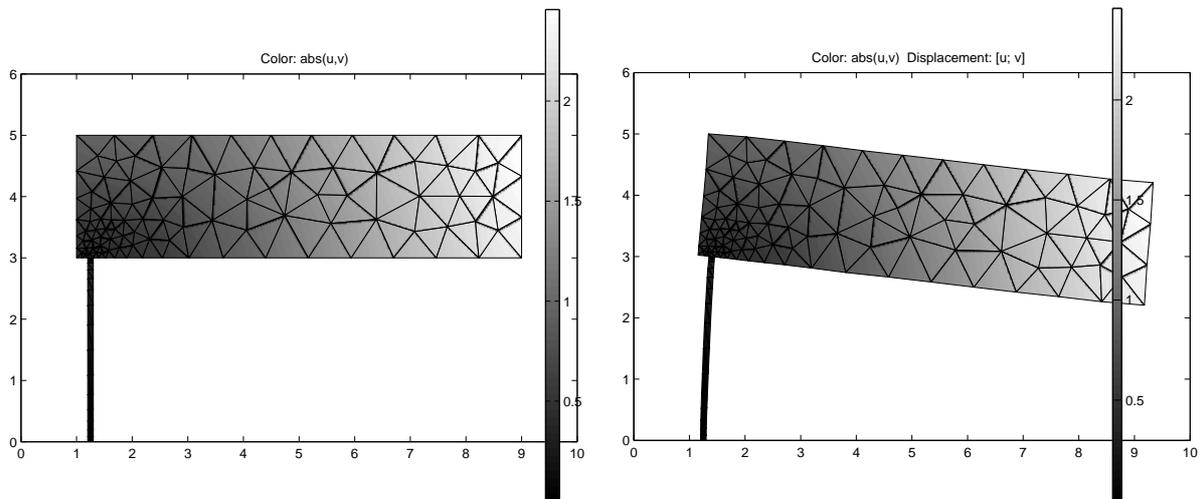


<sup>1</sup>Martensitischer Stahl bei 20°C:  $\rho = 7770$  kg/m<sup>3</sup>,  $E = 195$  GPa,  $\nu = 0,28$ .

**Beispiel 2:** Eine 0,1-Meter dicke Betonwand<sup>2</sup> mit dem nachstehenden Profil (gemessen in Metern) sei am Boden befestigt. Unter Einwirkung der Schwerkraft entsteht folgendes Verschiebungsfeld in der  $y$ -Richtung:



**Beispiel 3:** Abschließend geben wir ein Beispiel einer stark deformierten Struktur an. Ein Holzbalken (getrocknete Eiche<sup>3</sup>) mit den Abmessungen  $2\text{ m} \times 8\text{ m} \times 0,5\text{ m}$  sei mittels einer dünneren Holzplatte mit den Abmessungen  $0,1\text{ m} \times 3\text{ m} \times 0,5\text{ m}$  am Boden befestigt. Durch Einwirkung der Schwerkraft deformiert sich die Struktur am rechten Rand betragsmäßig um mehr als 2 m.



a) Referenzkonfiguration

b) Deformierte Konfiguration

□

**Aufgabe 12.4** (Freiwillig)

(4 Punkte)

a) Gegeben sei die Abbildung  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , welche für  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  durch

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(x) \cosh(y) \\ \sin(x) \sinh(y) \end{pmatrix}$$

erklärt ist. Untersuchen Sie  $f$  auf (lokale) Umkehrbarkeit in jedem  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ .

<sup>2</sup>Beton bei 20°C:  $\rho = 2400\text{ kg/m}^3$ ,  $E = 30\text{ GPa}$ ,  $\nu = 0,2$ .

<sup>3</sup>Eiche bei 20°C:  $\rho = 710\text{ kg/m}^3$ ,  $E = 12,5\text{ GPa}$ ,  $\nu = 0,1$ .

- b) Sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto e^y + y^3 + 3x^2 - (e+4)$ . Beweisen Sie, dass die Gleichung  $f(x, y) = 0$  in einer Umgebung von  $(-1, 1)$  nach  $y$  durch eine stetig differenzierbare Funktion  $\varphi$  auflösbar ist und berechnen Sie die Ableitung  $\varphi'$  von  $\varphi$ .

## Lösung

- a) Die Funktion  $f$  ist beliebig oft partiell differenzierbar im  $\mathbb{R}^2$ , insbesondere also einmal stetig differenzierbar. Die Ableitung  $f'$  von  $f$  lautet

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin(x) \cosh(y) & \cos(x) \sinh(y) \\ \cos(x) \sinh(y) & \sin(x) \cosh(y) \end{pmatrix}$$

und es gilt

$$\begin{aligned} |\det f'(x, y)| &= |-\sin(x) \cosh(y) \sin(x) \cosh(y) - \cos(x) \sinh(y) \cos(x) \sinh(y)| \\ &= \sin^2(x) \cosh^2(y) + \cos^2(x) \sinh^2(y) \geq \min\{\sinh^2(y), \cosh^2(y)\}(\sin^2(x) + \cos^2(x)) \\ &= \min\{\sinh^2(y), \cosh^2(y)\} =: c(y). \end{aligned}$$

Sei  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Dann gilt:

1. Ist  $y \neq 0$ , so ist  $|\det f'(x, y)| \geq c(y) > 0$ .
2. Ist  $y = 0$ , so findet man  $|\det f'(x, y)| = \sin^2(x) > 0$  genau dann, wenn  $x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

Wir definieren  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0 \text{ oder } x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$ . Für alle  $(x^*, y^*) \in X$  gibt es nach dem Satz über die inverse Funktion eine Umgebung  $U_{(x^*, y^*)}$  von  $(x^*, y^*)$  so, dass  $f|_{U_{(x^*, y^*)}}: U_{(x^*, y^*)} \rightarrow f(U_{(x^*, y^*)})$  ein  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus ist.

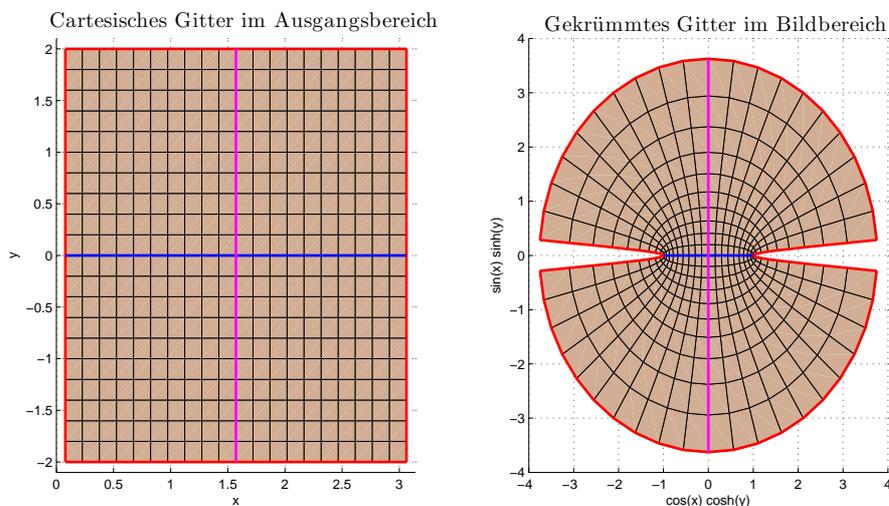


Abbildung 3

Der Satz lässt sich leider nicht auf die auf der Gerade  $(x, 0)$  liegenden Punkte anwenden. Diese müssen wir separat untersuchen. Sei also  $(x, y) \notin X$ , also  $(x, y) = (\pi k, 0)$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ . Für  $h > 0$  gilt

$$\begin{aligned} f(x+h, h) &= \begin{pmatrix} \cos(\pi k + h) \cosh(h) \\ \sin(\pi k + h) \sinh(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos(\pi k) \cos(h) - \sin(\pi k) \sin(h)) \cosh(h) \\ (\sin(\pi k) \cos(h) + \cos(\pi k) \sin(h)) \sinh(h) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^k \cos(h) \cosh(h) \\ (-1)^k \sin(h) \sinh(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^k \cos(-h) \cosh(-h) \\ (-1)^k \sin(-h) \sinh(-h) \end{pmatrix} = f(x-h, -h). \end{aligned}$$

Somit kann die Funktion  $f$  in keiner Umgebung von  $(x, y)$  invertierbar sein, da sie in keiner Kugel um  $(x, y)$  injektiv ist.

b)  $f$  ist eine stetig differenzierbare Funktion auf der offenen Menge  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Für  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  gilt

$$\partial_x f(x, y) = 6x, \quad \partial_y f(x, y) = e^y + 3y^2.$$

Wegen  $\partial_y f(-1, 1) = e + 3 \neq 0$  existiert nach dem Satz über die Implizite Funktion eine offene, (weg)zusammenhängende Umgebung von  $x^* = 1$  und eine Funktion  $\varphi \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$  mit  $\varphi(x^*) = 1 =: y^*$ .

Für  $x \in U$  gilt  $f(x, \varphi(x)) = 0$  und daher

$$0 = \frac{d}{dx} f(x, \varphi(x)) = f_x(x, \varphi(x)) + f_y(x, \varphi(x))\varphi'(x).$$

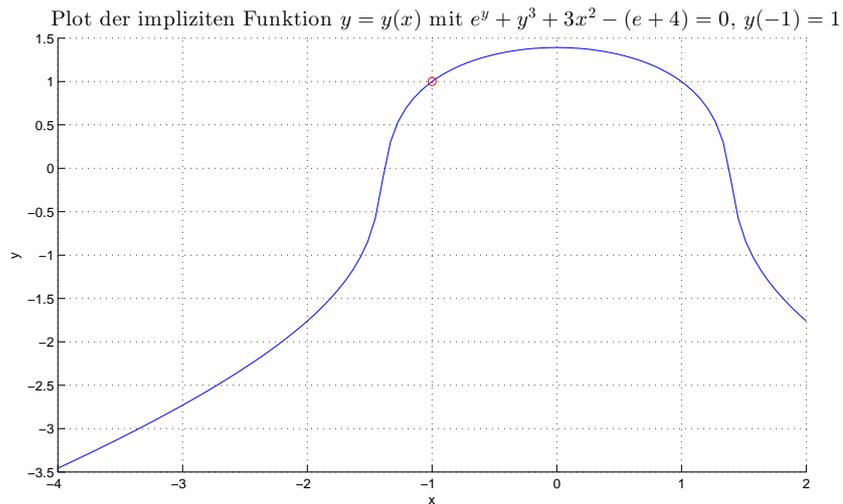


Abbildung 4

Wegen  $\partial_y f(x, y) > 0$  für  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  gilt für  $x \in U$

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))} = -\frac{6x}{e^{\varphi(x)} + 3\varphi^2(x)}.$$

In  $x = -1$  gilt insbesondere

$$\varphi'(-1) = -\frac{f_x(-1, 1)}{f_y(-1, 1)} = \frac{6}{e + 3}.$$

**Bemerkung:** Unter Benutzung der Fortsetzungsargumente kann man sogar  $U = \mathbb{R}$  zeigen.

□