Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dr. Michael Pokojovy

17. April 2012

Analysis II
1. Übungsblatt

Aufgabe 1.1 (4 Punkte)

Stellen Sie die Funktion $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, in der Form

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big)$$

für gewisse $a_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$, und b_k, $k \in \mathbb{N}$, dar.

Aufgabe 1.2 (4 Punkte)

Sei $f \in \mathcal{C}^0\big([-\pi,\pi],\mathbb{C}\big)$ mit $f(-\pi) = f(\pi)$. Zeigen Sie, dass f genau dann reellwertig ist, wenn für die Fourierkoeffizienten $f_j \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{Z}$, von f

$$f_{-j} = \overline{f_j} \text{ für } j \in \mathbb{Z}$$

gilt.

Aufgabe 1.3 (4 Punkte)

Sei $k \in \mathbb{N}$ und sei $f \in \mathcal{C}^k\big([-\pi,\pi],\mathbb{C}\big)$ eine Funktion mit $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$ für $j = 0,\dots,k$. Beweisen Sie, dass es dann eine Konstante $c > 0$ so gibt, dass die Fourierkoeffizienten $f_j \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{Z}$, von f die Ungleichung

$$|f_j| \leq \frac{c}{(1+|j|)^k} \text{ für } j \in \mathbb{Z}$$

erfüllen.

Aufgabe 1.4 (Freiwillig) (4 Punkte)

Sei $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 1-periodisch, d. h. $f(x+1) = f(x)$ gelte für alle $x \in \mathbb{R}$, und sei $\gamma \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Zeigen Sie:

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(j\gamma) \to \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \text{ für } n \to \infty.$$

Hinweis: Beweisen Sie die Aussage zunächst für den Fall $f(x) = e^{2\pi i j x}$, $j \in \mathbb{Z}$, und benutzen Sie ein Dichtheitsresultat für trigonometrische Funktionen.

Abgabetermin: Donnerstag, 26. April 2012, vor 12:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.