Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dr. Michael Pokojovy

26. April 2012

Analysis II
2. Übungsblatt

Aufgabe 2.1 (4 Punkte)

Untersuchen Sie die nachstehenden Funktionen auf Stetigkeit:

a) $f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\, x = (x_1, x_2)' \mapsto \begin{cases} \frac{x_1 x_2^3}{(x_1^2+x_2^2)^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$

b) $f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\, x = (x_1, x_2)' \mapsto \begin{cases} \frac{x_1^3 x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Hinweis: Für die Untersuchung im Ursprung führen Sie die Polarkoordinaten ein.

Aufgabe 2.2 (4 Punkte)

Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) f ist stetig.

b) Für jede offene Menge $U \subset Y$ ist $f^{-1}(U) \subset X$ offen.

c) Für jede abgeschlossene Menge $A \subset Y$ ist $f^{-1}(A) \subset X$ abgeschlossen.

Aufgabe 2.3 (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$. $\|\cdot\|_2$ bezeichne die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, dass es $c_1, c_2 > 0$ derart gibt, dass

$$c_1\|x\|_2 \leq \|x\| \leq c_2\|x\|_2$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt, indem Sie zunächst Folgendes zeigen:

a) Es gibt ein $C > 0$ so, dass $\|x\| \leq C\|x\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.
Hinweis: Darstellung von x über eine Basis von $\mathbb{R}^n$.

b) Die Funktion $f\colon \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \|x\|$ nimmt ihr positives Minimum an.

Aufgabe 2.4 (4 Punkte)

Wir versehen die Menge

$$X := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 < x \leq 1, y = \sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\right\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1\}$$

mit der euklidischen Metrik des $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass X zusammenhängend, aber nicht weg-zusammenhängend ist.

Hinweis: Beweisen Sie zunächst: Ist $Y \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend, so ist auch $\overline{Y}$ zusammenhängend.

Abgabetermin: Donnerstag, 3. Mai 2012, vor 14:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.