Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dr. Michael Pokojovy

3. Mai 2012

Analysis II
3. Übungsblatt

Aufgabe 3.1 (4 Punkte)

Es seien X und Y normierte Räume. Für $A \in L(X,Y)$ sei $\|A\|_{L(X,Y)} := \sup\limits_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y$.

a) Zeigen Sie, dass $\big(L(X,Y), \|\cdot\|_{L(X,Y)}\big)$ ein normierter Raum ist.

b) Bestimmen Sie $\|A\|_{L(X,Y)}$ für die Abbildung $A\colon X \to Y$, $x \mapsto \int_0^2 x(s)\mathrm{d}s$, wobei $X = \big(\mathcal{C}^0([0,2],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2((0,2),\mathbb{R})}\big)$, $Y = \mathbb{R}$.

Aufgabe 3.2 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Ableitungen der nachstehenden Funktionen:

a) $f_1\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle$, $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $b \in \mathbb{R}^m$ fest,

b) $f_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto \begin{pmatrix} \cos(x_2)\sin(x_1x_3) \\ 1 - x_3^2x_1 \end{pmatrix}$,

c) $f_3\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{m+1}{2}\sum\limits_{k=2}^m (x_k - x_{k-1})^2 + \frac{m+1}{2}(x_1 - a)^2 + \frac{m+1}{2}(b - x_m)^2 - \frac{1}{m+1}\sum\limits_{k=1}^m x_k g_k$, $a, b \in \mathbb{R}$, $g \in \mathbb{R}^m$ fest.

Bemerkung: Bei f_3 handelt es sich um eine diskrete Form des Dirichletschen Funktionals, welches die potentielle Energie einer angespannten Seite beschreibt.

Aufgabe 3.3 (4 Punkte)

Beschreiben Sie die Höhen- und Falllinien der folgenden Funktionen:

a) $f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y)' \mapsto \frac{1}{2}x^2 + y^2$,

b) $f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y)' \mapsto x^2$.

Aufgabe 3.4 (4 Punkte)

Sei $g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = g(|x|) \text{ für } x \in \mathbb{R}^m, \text{ wobei } |\cdot| = \|\cdot\|_2.$$

Berechnen Sie für $x \neq 0$:

a) $\nabla f(x)$,

b) $\triangle f(x)$, falls f zusätzlich zweimal differenzierbar ist.

Zeigen Sie:

c) f genau dann im $\mathbb{R}^m$ differenzierbar ist, wenn g in $(0,\infty)$ differenzierbar ist und in 0 die rechtsseitige Ableitung $g'(0+) = 0$ hat.

Abgabetermin: Donnerstag, 10. Mai 2012, vor 12:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.