Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dr. Michael Pokojovy

10. Mai 2012

Analysis II
4. Übungsblatt

Aufgabe 4.1 (4 Punkte)

Beweisen Sie:

a) Die Funktion $\theta\colon (0,\infty)\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\theta(t,x) = (4\pi ct)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|_2^2}{4ct}}$ löst die ,,Wärmeleitungsgleichung“
$$\partial_t\theta(t,x) = c\triangle\theta(t,x) \text{ für } (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n.$$

b) Die Funktion $u\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $u(t,x) = f(v\cdot x - c\|v\|_2 t)$ löst die ,,Wellengleichung“
$$\partial_t^2 u(t,x) = c^2\triangle u(t,x) \text{ für } (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,$$

worin $c\in\mathbb{R}$, $v\in\mathbb{R}^n$ und $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ fest sind. Hierbei bezeichne $\triangle = \sum_{k=1}^n \partial_{x_k}^2$ den Laplaceoperator bzgl. der Ortsvariable x.

Aufgabe 4.2 (4 Punkte)

Berechnen Sie für die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $(x,y,z)\mapsto (x^3+y^3+z)e^{z^2}$ den Gradienten, die Hessematrix sowie die Taylor-Approximation erster und zweiter Ordnung im Ursprung.

Aufgabe 4.3 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Extrema der nachstehenden Funktionen:

a) $f_1\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 100(x_2-x_1^2)^2+(1-x_1)^2$,

b) $f_2\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 8x_1+12x_2+x_1^2-2x_2^2$.

Aufgabe 4.4 (4 Punkte)

Sei $n\in\mathbb{N}$ und seien $X_1,\ldots,X_n\in\mathbb{R}$. Für $\mu\in\mathbb{R}$, $\sigma>0$ und $x\in\mathbb{R}$ definieren wir die Abbildung $\varphi(x;\mu,\sigma) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. Untersuchen Sie die Funktion $L\colon \mathbb{R}\times(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $(\mu,\sigma)\mapsto \prod_{k=1}^n \varphi(X_k;\mu,\sigma)$ auf kritische Stellen.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $\log(L)$.

Abgabetermin: Freitag, 18. Mai 2012, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.