Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dr. Michael Pokojovy

24. Mai 2012

Analysis II
6. Übungsblatt

Aufgabe 6.1 (4 Punkte)
Seien $a, b > 0$. Skizzieren Sie die folgenden Kurven und berechnen Sie deren Längen:

a) $\gamma_1\colon [-b, b] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, a\cosh(\frac{t}{a}))$ („Katenoide“ oder „Kettenlinie“),

b) $\gamma_2\colon [0, 3\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto a\sin^3(\frac{t}{3})(\cos(t), \sin(t))$.

Aufgabe 6.2 (4 Punkte)
Gegeben sei die Folge $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Wegen, wobei

$$\gamma_n\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) + \frac{1}{n}\cos(nt) \\ \sin(t) + \frac{1}{n}\sin(nt) \end{pmatrix} \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

a) Untersuchen Sie, ob die Folge im $\mathcal{C}^0$- oder sogar im $\mathcal{C}^1$-Sinne konvergiert.

b) Welcher Weg γ kommt jeweils als Grenzwert in Frage?

c) Berechnen Sie die Längen $L(\gamma_n)$ und $L(\gamma)$ von γ_n und γ.

Definition 6.1 Sei Γ eine Kurve mit Parametrisierung $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^d$. Für eine Zerlegung $Z := \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ definieren wir $l(Z) := \sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|$. Γ heißt „rektifizierbar“, falls $L_D(\gamma) := \sup\{l(Z) \mid Z \text{ ist Zerlegung von } [a, b]\} < \infty$ gilt.

Aufgabe 6.3 (4 Punkte)
Zeigen Sie:

a) Gilt $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^d)$, so ist $L_D(\gamma) = L(\gamma) = \int_a^b |\dot\gamma(t)|\mathrm{d}t$.
Hinweis: Beweisen Sie: Sind Z, Z' Zerlegungen von $[a, b]$ mit $Z' \subset Z$, so gilt $l(Z') \leq l(Z)$.

b) Die Kurve $\Gamma := [\gamma]$, $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $s \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } s = 0 \\ \left(s, s^2\cos\left(\frac{\pi}{s^2}\right)\right), & \text{sonst} \end{cases}$ ist nicht rektifizierbar.

Definition 6.2 Wir definieren mittels

$$\mathcal{C}_0^\infty((0, 1), \mathbb{R}^d) := \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R}^d) \mid \text{ es gibt } \delta > 0 \text{ mit } \varphi|_{[0,\delta]\cup[1-\delta,1]} = 0\}$$

die „Menge der Testfunktionen“.

Aufgabe 6.4 (4 Punkte)
Sei $X := \{u \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}^d) \mid u(0) = a, \dot u(0) = p, u(1) = b, \dot u(1) = q\}$, wobei $a, b, p, q \in \mathbb{R}^d$ fest sind. Wir definieren die Abbildung

$$F\colon X \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto \int_0^1 |\ddot u(t)|^2 \mathrm{d}t.$$

Sei $\bar u \in X \cap \mathcal{C}^4([0, 1], \mathbb{R}^d)$.

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) $\bar{u}$ ist eine kritische Stelle von F, d. h. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}F(\bar{u}+\varepsilon\varphi)|_{\varepsilon=0} = 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty((0,1),\mathbb{R}^d)$.

ii) $\int_0^1 \ddot{\bar{u}}(t)\cdot\ddot{\varphi}(t)\mathrm{d}t = 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty((0,1),\mathbb{R}^d)$.

iii) $\bar{u}^{(4)}(t) = 0$ für $t \in [0,1]$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis das Fundamentallemma der Variationsrechnung verwenden:
Gilt für ein $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}^d)$ die Identität $\int_0^1 f(t)\cdot\varphi(t)\mathrm{d}t = 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty((0,1),\mathbb{R}^d)$, so ist $f \equiv 0$.

b) Wie lauten die kritischen Stellen von F in $X \cap \mathcal{C}^4([0,1],\mathbb{R}^d)$?

Abgabetermin: Donnertag, 31. Mai 2012, vor 12:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.