Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dr. Michael Pokojovy

31. Mai 2012

Analysis II
7. Übungsblatt

Aufgabe 7.1 Es sei $\gamma\colon [0, L] \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. Der Krümmungskreis von γ im Punkt s_0 ist der Kreis mit Radius $\frac{1}{\kappa(s_0)}$, der im Punkt $\gamma(s_0)$ den gleichen Tangentenvektor wie γ selbst hat, wobei der Kreis und die Kurve γ auf derselben Seite des Tangentevektors liegen und $\kappa(s_0)$ die Krümmung von γ in s_0 bezeichnet.

a) Bestimmen Sie die Kreisgleichung des auf Bogenlänge bezogenen Krümmungskreises an der Stelle $s_0 \in [0, L]$ mit $\kappa(s_0) \neq 0$, d. h. die Größen $r > 0$, $a, b, m \in \mathbb{R}^2$ der Gleichung

$$k(s) = m + r\cos\left(\frac{s - s_0}{r}\right) \cdot a + r\sin\left(\frac{s - s_0}{r}\right) \cdot b.$$

b) Zeigen Sie, dass die Vektoren a und b orthonormiert sind.

c) Beweisen Sie, dass der Krümmungskreis die Kurve γ an der Stelle s_0 von zweiter Ordnung berührt.

Definition 7.1 Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ und sei $x \in \Gamma$. Die Menge

$$T_x\Gamma := \{t \in \mathbb{R}^n \mid \text{ es gibt } \gamma \in \mathcal{C}^1((-\varepsilon, \varepsilon), \Gamma) \text{ mit } \gamma(0) = x \text{ und } \dot\gamma(0) = t\}$$

heißt ,,Tangentialraum“ an Γ im Punkt x. Die Elemente t von Γ heißen ,,Tangentialvektoren“.

Aufgabe 7.2 Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ und sei $x \in \Gamma$. Beweisen Sie:

a) $T_x\Gamma$ ist im Allgemeinen kein Vektorraum.

b) Lässt sich Γ durch ein $\gamma\colon U \to \Gamma$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, als eine m-Fläche darstellen, so gilt $T_{\gamma(u)}\Gamma = \{\gamma'(u)h \mid h \in \mathbb{R}^m\}$ für $u \in U$.

Aufgabe 7.3 Gegeben sei die Menge

$$T := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2\right\},$$

wobei $0 < r < R$ fest sind.

a) Skizzieren Sie die Menge T.

b) Finden Sie zwei glatte Kurven $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathbb{R}^3$ so, dass $T \backslash (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ sich als eine 2-Fläche darstellen lässt.

Aufgabe 7.4 Die Mengen

$$M_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 - z^2 = 1\},$$
$$M_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 - z^2 = -1\}$$

heißen ,,einschaliges bzw. zweischaliges Hyperboloid“.

a) Skizzieren Sie die Mengen M_1 und M_2.

b) Zeigen Sie, dass sich $M_1 \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0,\infty))$ und $M_2 \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0,\infty))$ als 2-Flächen parametrisieren lassen.

c) Beweisen Sie, dass M_1 und $M_2 \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (1,\infty))$ Rotationsflächen im Sinne von Beispiel 12.11 sind.

Abgabetermin: Freitag, 8. Mai 2012, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.