Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dr. Michael Pokojovy

5. Juni 2012

Analysis II
8. Übungsblatt

Aufgabe 8.1 Es seien X und Y nichtleere Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Ferner seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ σ-Algebren über X bzw. Y. Zeigen Sie:

a) $f^{-1}(\mathcal{B}) := \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ ist eine σ-Algebra über X.

b) $f_*(\mathcal{A}) := \{B \subset Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ ist eine σ-Algebra über Y.

Aufgabe 8.2 Es sei X eine beliebige Menge und sei $A_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq m} A_n \text{ und } \limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq m} A_n.$$

Beweisen Sie:

a) $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n \subset \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$.

b) $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \{x \in X \mid \text{es gibt } n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } x \in A_n \text{ für alle } n \geq n_0\}$.
$\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \{x \in X \mid x \in A_n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\}$.

c) Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und gilt $A_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, sowie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$, so folgt $\mu\left(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n\right) = 0$.

Aufgabe 8.3 Zeigen, dass es sich bei den im Beispiel 13.5 definierten

a) Dirac-Maß und b) Zählmaß

um Maße handelt.

Aufgabe 8.4 Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Gilt $x - y \in \mathbb{Q}$, so schreiben wir $x \sim y$. $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$. Wir betrachten die Äquivalenzklasse $[x] := \{y \in \mathbb{R} \mid x \sim y\}$ von $x \in \mathbb{R}$. Sei μ das Lebesgue-Maß auf den Borel-Mengen $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ des $\mathbb{R}$. Sei $V \subset [0, 1]$ die kleinste Menge mit der Eigenschaft, dass $V \cap [x]$ für alle $x \in \mathbb{R}$ einelementig ist.

Bemerkung: Die Existenz von V folgt mit dem Auswahlaxiom.

Zeigen Sie, dass $V \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt, indem Sie Folgendes nachweisen:

a) Es gilt $[0, 1] \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V_n \subset [-1, 2]$, wobei $V_n = \{v+q_n \mid v \in V\}$ und $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Aufzählung von $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ ist.

b) Es ist $\mu(V_n) = \mu(V_m)$ für $m, n \in \mathbb{N}$.

c) Sowohl die Annahme $\mu(V) = 0$ als auch $\mu(V) > 0$ führen zum Widerspruch.

Abgabetermin: Donnerstag, 14. Juni 2012, vor 12:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.