Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dr. Michael Pokojovy

14. Juni 2012

Analysis II
9. Übungsblatt

Aufgabe 9.1 Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Seien $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie:

a) $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in \mathcal{L}^1(\mu)$,

b) $\int (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \mathrm{d}\mu = \alpha_1 \int f_1 \mathrm{d}\mu + \alpha_2 \int f_2 \mathrm{d}\mu$.

Aufgabe 9.2 Sei $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie:

a) Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und wegzusammenhängend, so gibt es ein $\xi \in \Omega$ mit

$$\int_\Omega f(x) \mathrm{d}\mu(x) = f(\xi)\mu(\Omega).$$

b) Es gilt $\lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\mu(B(x,\varepsilon))} \int_{B(x,\varepsilon)} f(y) \mathrm{d}\mu(y) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 9.3 Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Die Abbildungen $g, f_n \colon X \to [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$, seien messbar, wobei $\int g \mathrm{d}\mu < \infty$. Weiter gelte $f_n(x) \le g(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in X$. Zeigen Sie:

a) Es gilt

$$\limsup_{n \to \infty} \int f_n \mathrm{d}\mu \le \int \left(\limsup_{n \to \infty} f_n \right) \mathrm{d}\mu.$$

b) Man kann bei a) auf die Existenz der majorisierenden Funktion nicht verzichten.

Definition 9.1 Sei $\Theta \subset \mathbb{R}^d$ eine Menge. Die Funktion $L \colon \Theta \to \mathbb{R}$ nehme in $\theta^* \in \Theta$ ihr eindeutiges globales Maximum an. Wir definieren $\arg\max\limits_{\theta \in \Theta} L(\theta) := \theta^*$.

Aufgabe 9.4 Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Maßraum, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Sei $n \in \mathbb{N}$ fest und seien $X_1, \ldots, X_n \colon \Omega \to \mathbb{R}$ messbar. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen messbar sind:

a) $\hat{\lambda}_n \colon \Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto \arg\max\limits_{\lambda > 0} \prod\limits_{k=1}^{n} \lambda e^{-\lambda X_k(\omega)}$, wobei $X_k(\Omega) \subset (0, \infty)$, $k = 1, \ldots, n$, gelte,

b) $\hat{F}_n(x, \cdot) \colon \Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \chi_{(-\infty, x]}(X_k(\omega))$, $x \in \overline{\mathbb{R}}$ fest,

c) $\hat{q}_n(\alpha, \cdot) \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \mapsto \inf \left\{ x \in \overline{\mathbb{R}} \,\middle|\, \hat{F}_n(x, \omega) \ge \alpha \right\}$, $\alpha \in [0, 1]$ fest.

Abgabetermin: Donnerstag, 21. Juni 2012, vor 12:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.