Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dr. Michael Pokojovy

21. Juni 2012

Analysis II
10. Übungsblatt

Aufgabe 10.1 Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix und sei $c \in \mathbb{R}^n$. Wir definieren die Menge $E := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, (x-c)^T A^{-1}(x-c) \leq 1\}$.

a) Zeigen Sie, dass E messbar ist.

b) Berechnen Sie das Lebesgue-Maß $\lambda(E)$ von E.

Hinweis: Das Lebesgue-Maß ω_n der n-dimensionalen Einheitskugel sei als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 10.2 Es sei mittels

$$T := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, (x - \tfrac{1}{10}z)^2 + (y - \tfrac{1}{10}z)^2 \leq 1 \text{ und } 0 \leq z \leq 10\right\}$$

ein durch einen schiefen Turm belegter Bereich T beschrieben. Skizzieren Sie den Bereich T und berechnen Sie dessen

a) Volumen V,

b) erste Schwerpunktskomponente $S_1 = \frac{1}{V}\int_T x\mathrm{d}(x,y,z)$.

Aufgabe 10.3 Wir definieren $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x,y \geq 0, x+y \leq 1\}$ und $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y)^T \mapsto (x+y,y)^T$.

a) Beweisen Sie

$$\int_D f(x+y)\mathrm{d}(x,y) = \int_{A(D)} f(s)\mathrm{d}(s,t) = \int_0^1 f(s)s\mathrm{d}s,$$

falls $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar ist.

b) Berechnen Sie

$$\int_D (x+y)^2 e^{(x+y)^2}\mathrm{d}(x,y).$$

Aufgabe 10.4 Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [1,\infty)$. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ eine Lebesgue-messbare Funktion, und sei f^p Lebesgue-integrierbar. Beweisen Sie:

$$\int f^p(x)\mathrm{d}x = p\int_0^\infty t^{p-1}\lambda\big(f^{-1}((t,\infty))\big)\mathrm{d}t.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Identität $f^p(x) = \int_0^{f(x)} pt^{p-1}\mathrm{d}t$.

Abgabetermin: Donnerstag, 28. Juni 2012, vor 12:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.