Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dr. Michael Pokojovy

28. Juni 2012

Analysis II
11. Übungsblatt

Aufgabe 11.1 Es sei $\omega\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $\omega(x,h) := (x_2 - x_1)h_2 + x_2 h_1$ gegeben. Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale:

a) $\int_\Gamma \omega$, wobei $\Gamma = [\gamma]$ mit $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) := (t,t)^T$,

b) $\int_\Gamma \omega$, wobei $\Gamma = [\gamma]$ mit $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t,t^2)^T$,

c) $\int_\Gamma \left\langle \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}, \mathrm{d}x \right\rangle$, wobei $\Gamma = [\gamma]$ mit $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ t^2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 11.2 Gegeben seien das Vektorfeld $v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto \begin{pmatrix} x_3^2 - x_2 \sin x_1 \\ \cos x_1 - 2x_3 \\ 2x_1 x_3 - 2x_2 + x_3 \end{pmatrix}$, und die 1-Form $\omega\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,h) \mapsto \langle v(x), h\rangle$. Zeigen Sie, dass ω exakt ist, und bestimmen Sie dessen Stammfunktion.

Aufgabe 11.3 Es seien $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $\gamma \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R}^n)$ stelle die Kurve Γ dar. Mit $f\mathrm{d}g$ bzw. $g\mathrm{d}f$ bezeichnet man die 1-Form $(x,h) \mapsto f(x)g'(x)h$ bzw. $(x,h) \mapsto g(x)f'(x)h$. Zeigen Sie:

$$\int_\Gamma f\mathrm{d}g = f(\gamma(b))g(\gamma(b)) - f(\gamma(a))g(\gamma(a)) - \int_\Gamma g\mathrm{d}f.$$

Aufgabe 11.4 Sei $\varphi \in \mathcal{C}^1((0,\infty), \mathbb{R})$. Wir definieren das Vektorfeld $v\colon \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto \varphi(|x|) \left(\begin{smallmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{smallmatrix}\right)$ sowie die 1-Form $\omega\colon (\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,h) \mapsto \langle v(x), h\rangle$.

a) Sei Γ der entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufene Kreis vom Radius r um den Ursprung. Skizzieren Sie v auf Γ und berechnen Sie $\int_\Gamma \omega$.

b) Zeigen Sie: Ist $\omega|_{((0,\infty)\times\mathbb{R})\times\mathbb{R}^2}$ exakt, dann folgt für $r > 0$

$$2\varphi(r) + r\varphi'(r) = 0.$$

Abgabetermin: Donnerstag, 5. Juli 2012, vor 12:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.