Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dr. Michael Pokojovy

5. Juli 2012

Analysis II
12. Übungsblatt

Aufgabe 12.1 Für $r, h > 0$ seien die Menge $U := \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < |x| < r\}$ und die Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$, $x \mapsto h\left(1 - \frac{|x|}{r}\right)$, definiert. Zeigen Sie, dass $S = \operatorname{graph} f$ eine 2-Fläche ist, und berechnen Sie den Flächeninhalt $A(S)$ von S.

Aufgabe 12.2 Beweisen Sie: $\int_\Omega \operatorname{div} F(x)\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \langle F(x), n(x)\rangle \mathrm{d}A(x)$, indem Sie beide Integrale explizit berechnen, wobei $\Omega := (0,3) \times (0,2)$ und $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto \begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$. Hierbei ist $n(x)$ für $x \in \partial\Omega$ stets der nach außen gerichtete Einheitsnormalenvektor zur Oberfläche $\partial\Omega$ am Punkt x.

Aufgabe 12.3 Seien $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$, $\sigma, \varepsilon \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^{2\times 2})$ das Verschiebungs-, Spannungs- bzw. Verzerrungsvektorfeld eines den Bereich $\Omega := \mathbb{R}^2$ belegenden elastischen Festkörpers. Sei $f \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}^2)$ eine auf den Körper wirkende Volumenkraft und seien $\lambda, \mu > 0$ die Lamé-Konstanten. Es gelte:

i) $\varepsilon(x) = \frac{1}{2}(\nabla u(x) + (\nabla u(x))^T)$, $x \in \Omega$ (Green-Lagrangescher Verzerrungstensor),

ii) $\sigma(x) = 2\mu\varepsilon(x) + \lambda \operatorname{spur}(\varepsilon(x)) I_2$ (Hookesches Gesetz für homogene, isotrope Medien),

iii) $\int\limits_{\partial\Omega'} \sum\limits_{j=1}^{2} \sigma_{ij}(x) n_j(x) \mathrm{d}A(x) + \int\limits_{\Omega'} f_i(x)\mathrm{d}x = 0$ für $i = 1, 2$ und alle beschränkten, glatt berandeten Gebiete $\Omega' \subset \Omega$ (Gleichgewichtsbedingung).

Beweisen Sie die nachstehenden Identitäten:

a) $\varepsilon(x) = (\varepsilon(x))^T$, $\sigma(x) = (\sigma(x))^T$, $x \in \Omega$ (Symmetrie der beiden Tensoren),

b) $-\operatorname{div} \sigma(x) = f(x)$, $x \in \Omega$ (Erhaltungsgesetz),

Hinweis: Wählen Sie $\Omega' = B(x, \varepsilon)$ und wenden Sie die Aufgabe 9.2 b) an.

c) $-\mu\triangle u(x) - (\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} u(x) = f(x)$, $x \in \Omega$ (Lamé-Gleichungen),

wobei $\nabla u := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} u_1 & \partial_{x_1} u_2 \\ \partial_{x_2} u_1 & \partial_{x_2} u_2 \end{pmatrix}$, $\operatorname{div} \sigma := \begin{pmatrix} \partial_{x_1}\sigma_{11} + \partial_{x_2}\sigma_{21} \\ \partial_{x_1}\sigma_{12} + \partial_{x_2}\sigma_{22} \end{pmatrix}$ und $\triangle u := \begin{pmatrix} \triangle u_1 \\ \triangle u_2 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Lassen Sie sich von der „Physik“ nicht abschrecken!

Aufgabe 12.4 (Freiwillig)

a) Gegeben sei die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(x)\cosh(y) \\ \sin(x)\sinh(y) \end{pmatrix}$$

erklärt ist. Untersuchen Sie f auf (lokale) Umkehrbarkeit in jedem $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

b) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto e^y + y^3 + 3x^2 - (e + 4)$. Beweisen Sie, dass die Gleichung $f(x, y) = 0$ in einer Umgebung von $(-1, 1)$ nach y durch eine stetig differenzierbare Funktion φ auflösbar ist und berechnen Sie die Ableitung φ' von φ.

Abgabetermin: Donnerstag, 12. Juli 2012, vor 12:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.