Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dr. Michael Pokojovy

26. Oktober 2012

Analysis III
Einstiegsübungsblatt

Aufgabe 1 (Ein einfaches Wirtschaftsmodell) (Freiwillig – 4 Punkte)
Wir betrachten eine Nation A, die sehr enge wirtschaftliche Verbindungen zu einer Nation B pflegt. Die Nation A exportiere selbst hergestellte Waren an B und importiere dafür von B hergestellte Waren aus dem Erzeugerland. Mit $x \geq 0$ bzw. $y \geq 0$ bezeichnen wir den Wert der von Nation A bzw. B hergestellten Waren, wobei der Wert in Einheiten geleisteter Arbeitsstunden berechnet sei. Der Anteil der von der Nation A bzw. B exportierten Waren sei mit $p_A \in [0,1]$ bzw. $p_B \in [0,1]$ bezeichnet. Die ,,Zufriedenheit“ oder der ,,Nutzen“ der Nationen werde mit Hilfe der ,,Nutzenfunktionen“ $U_A(x,y)$ und $U_B(x,y)$ für $x, y \geq 0$ gemessen.

a) Berechnen Sie den gesamten Warenwert $g_A(x,y)$ bzw. $g_B(x,y)$ von der Nation A bzw. B selbst verbrauchten und importierten Waren $x, y \geq 0$.

b) Bestimmen Sie die Nutzenfunktionen U_A und U_B, indem Sie annehmen, dass sich U_A bzw. U_B aus einem positiven Vielfachen von $\ln(1 + g_A(x,y))$ bzw. $\ln(1 + g_B(x,y))$ und einem negativen Vielfachen des zu produzierenden Warenwerts x bzw. y zusammensetzen.

c) Stellen Sie ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zur Beschreibung der zeitlichen Evolution der Warenwerte $x(t)$ und $y(t)$ auf, indem Sie postulieren, dass die zeitliche Änderung der Warenproduktion positiv proportional zur Änderung $\frac{\partial U_A(x,y)}{\partial x}$ bzw. $\frac{\partial U_B(x,y)}{\partial y}$ der durch die jeweilige Nutzenfunktion beschriebenen Zufriedenheit ist.
Bemerkung: Dies bedeutet, dass die Warenproduktion bei wachsender Zufriedenheit steigt.

Aufgabe 2 (Bewegungsgleichungen eines Doppelpendels) (Freiwillig – 4 Punkte)
Seien $g,\ l_1, l_2, m_1, m_2 > 0$. Die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bezeichnen die generalisierten Koordinaten eines Doppelpendes und genügen folgenden Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\, l_1 \varphi_1''(t) + m_2 l_2 \varphi_2''(t) \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) + \\ \qquad m_2 l_2 (\varphi_2'(t))^2 \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) + g\,(m_1 + m_2) \sin\varphi_1(t) = 0 \text{ für } t \in \mathbb{R}, \\ m_2 l_2 \varphi_2''(t) + m_2 l_1 \varphi_1''(t) \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) - \\ \qquad m_2 l_1 (\varphi_1'(t))^2 \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) + g m_2 \sin\varphi_2(t) = 0 \text{ für } t \in \mathbb{R}, \\ \varphi_1(0) = -\frac{\pi}{3},\ \varphi_1'(0) = 0,\ \varphi_2(0) = \frac{\pi}{6},\ \varphi_2'(0) = 0, \end{cases}$$

a) Transformieren Sie das Problem auf ein System erster Ordnung der Form

$$A(V(t))V'(t) = F(V(t)) \text{ für } t \geq 0, \quad V(0) = V_0,$$

wobei $V(t) := (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1', \varphi_2')^T(t)$ und $A \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^{4\times 4})$, $F \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$.

b) Zeigen Sie, dass $A(V)$ für alle $V \in \mathbb{R}^4$ invertierbar ist, und leiten Sie eine entsprechende explizite Differentialgleichung der Form

$$V'(t) = G(V(t)) \text{ für } t \geq 0, \quad V(0) = V_0$$

her.

Aufgabe 3 (Freiwillig – 4 Punkte)

Vereinfachen Sie die nachstehenden Differentialgleichungen, indem Sie die angegebenen Substitutionen durchführen:

a) $x'(t) = ax(t) + f(t)$ für $t \in \mathbb{R}$, Substitution: $x(t) = c(t)e^{at}$, wobei $a \in \mathbb{R}$, $x, c \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

b) $tx'(t) = Ax(t)$ für $t > 0$, Substitution: $y(t) = Sx(\ln(t))$, wobei $x, y \in \mathcal{C}^1((0,\infty), \mathbb{R}^n)$ und die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gemäß $A = S^{-1}DS$ diagonalisierbar ist,

c) $x'(t) = f\left(\frac{x(t)}{t}\right)$, $t > 0$, Substitution: $y(t) := \frac{x(t)}{t}$, wobei $x, y \in \mathcal{C}^1((0,\infty), \mathbb{R})$, $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Hinweis: Es müssen keine Lösungen bestimmt werden.

Abgabetermin: Freitag, den 2. November 2012, vor 12:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.