Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dr. Michael Pokojovy

2. November 2012

Analysis III
1. Übungsblatt

Aufgabe 1.1 (4 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Differentialgleichungen:

a) $y'(t) = \cos(t)$,

b) $y'(t) = \frac{y(t)}{t}$,

c) $y'(t) = \sin^2\big(y(t)\big)$,

d) $y'(t) = \big(y(t)\big)^2 + t^2$.

Skizzieren Sie die zugehörigen Richtungsfelder und zeichnen Sie jeweils die Lösungskurven zu zwei beliebigen Anfangswerten.

Aufgabe 1.2 (4 Punkte)

Sei $a > 0$. Lösen Sie das Problem

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2t(1 + x(t)) \text{ für } t \in [0, a], \\ x(0) &= 0 \end{aligned}$$

mit Hilfe des Picardschen Iterationsverfahrens, indem Sie $x^0 \equiv 0$ als Startwert wählen.

Hinweis: Kontrollieren Sie zunächst, ob der Satz von Picard & Lindelöf anwendbar ist.

Aufgabe 1.3 (4 Punkte)

Untersuchen Sie das nachstehende Anfangswertproblem auf eindeutige lokale Lösbarkeit:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -Gm_2 \frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|^3}, \\ \ddot{x}_2 = -Gm_1 \frac{x_2 - x_1}{|x_1 - x_2|^3}, \\ x_1(0) = x_1^0,\ x_2(0) = x_2^0,\ \dot{x}_1(0) = x_1^1,\ \dot{x}_2(0) = x_2^1, \end{cases} \qquad \text{(Zweikörperproblem)}$$

wobei $x_1^0, x_2^0, x_1^1, x_2^1 \in \mathbb{R}^3$, $x_1^0 \neq x_2^0$, und $G, m_1, m_2 > 0$.

Aufgabe 1.4 (4 Punkte)

Seien $n, d \in \mathbb{N}$ und $\tau > 0$. Ferner sei $f\colon [0, n\tau] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $(t, x, y) \mapsto f(t, x, y)$, stetig und genüge einer globalen Lipschitz-Bedingung bzgl. x. Wir betrachten das Problem

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t), x(t - \tau)) \text{ für } t \in [0, n\tau], \\ x(t) &= \varphi(t) \text{ für } t \in [-\tau, 0], \end{aligned} \qquad \text{(DDE)}$$

wobei $\varphi \in \mathcal{C}^1([-\tau, 0], \mathbb{R}^d)$ vorgegeben ist. Beweisen Sie, dass (DDE) eine eindeutige Lösung $x \in \mathcal{C}^1([-\tau, n\tau], \mathbb{R}^d)$ besitzt.

Hinweis: Beschränken Sie das Problem auf die Intervalle $[k\tau, (k+1)\tau]$, $k = 0, \dots, n-1$, und lösen Sie die dadurch entstandenen n Anfangswertprobleme iterativ mit Hilfe des Satzes von Picard & Lindelöf.

Abgabetermin: Freitag, den 9. November 2012, vor 12:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.