Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Michael Pokojovy

23. April 2008

Funktionentheorie
1. Übungsblatt

Aufgabe 1.1 Untersuchen Sie, in welchen Punkten aus $\mathbb{C}$ die folgenden Funktionen komplex differenzierbar sind:

a) $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x + iy \mapsto xy + ixy$,

b) $f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x + iy \mapsto y^2 \sin x + iy$,

c) $f_3 : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$, $x + iy \mapsto \frac{ix+y}{x^2+y^2}$.

Aufgabe 1.2 Sei f holomorph in einem Gebiet G. Für ein $z_0 \in G$ gelte $w_0 = f(z_0)$ und $f'(z_0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass es offene Kreisscheiben $B_\delta(z_0) \subset G$ und $B_\varepsilon(w_0) \subset f(G)$ derart gibt, dass

a) $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in B_\delta(z_0)$,

b) die Gleichung $f(z) = w$ für jedes $w \in B_\varepsilon(w_0)$ durch ein $z \in B_\delta(z_0)$ eindeutig lösbar ist,

c) die Umkehrabbildung $f^{-1} : B_\varepsilon(w_0) \to B_\delta(z_0)$ holomorph ist und ihre Ableitung durch

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$$

gegeben ist.

Aufgabe 1.3 Eine stetig differenzierbare Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ heißt harmonisch, wenn $\partial_x^2 h(x, y) + \partial_y^2 h(x, y) = 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt.

a) Sei $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ harmonisch. Zeigen Sie, dass h Realteil einer in $\mathbb{C}$ holomorphen Funktion ist.

b) Für welche $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist $g(h)$ harmonisch für jedes harmonische h?

Aufgabe 1.4 Sei $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 1\}$. Konstruieren Sie einen durch $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ parametrisierten Weg Γ, der den Rand von G im Gegenuhrzeigersinn verläuft, und berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\int_\Gamma \zeta e^{i\zeta^2} \,\mathrm{d}\zeta$,

b) $\int_\Gamma \operatorname{Im} \zeta \,\mathrm{d}\zeta$.

Abgabetermin: Mittwoch, 30. April 2008, vor 12:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.