Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Michael Pokojovy

21. Mai 2008

Funktionentheorie
3. Übungsblatt

Aufgabe 3.1 Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Es sei für holomorphe Funktionen $f, g : G \backslash \{z_0\} \to \mathbb{C}$ mit $z_0 \in G$ vorausgesetzt, dass

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = 0, \quad \lim_{z \to z_0} g(z) = 0$$

gilt und dass der Grenzwert

$$c := \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

existiert. Zeigen Sie die Gültigkeit von

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = c.$$

Aufgabe 3.2 Beweisen Sie: Ist $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, welche

$$|f(z)|^2 \leq 1 - |z|^2$$

für alle $z \in B(0,1)$ erfüllt, so gilt $f \equiv 0$.

Aufgabe 3.3 Es seien f und g holomorph in einem Gebiet G. Zeigen Sie:

a) Gilt $f \cdot g \equiv 0$, so folgt, dass entweder $f \equiv 0$ oder $g \equiv 0$ gelten muss.

b) Gilt $g(G) \subset G$ und $f \circ g = 0$, so muss g konstant oder $f \equiv 0$ sein.

Aufgabe 3.4 Sei f holomorph in $B(z_0, R)$. Beweisen Sie für $0 < r < R$

$$f'(z_0) = \frac{1}{\pi r} \int_0^{2\pi} p(\varphi) e^{-i\varphi} \mathrm{d}\varphi,$$

wobei $p(\varphi) = \operatorname{Re} f(z_0 + re^{i\varphi})$.

Aufgabe 3.5 Eine (von der Identität verschiedene) Möbiustransformation f ist durch die Vorgabe von drei paarweise verschiedenen Punkten z_1, z_2, z_3 mit den Werten $w_k = f(z_k)$, $k = 1, 2, 3$ eindeutig bestimmt.

Abgabetermin: Mittwoch, 28. Mai 2008, vor 12:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.