Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Michael Pokojovy

4. Juni 2008

Funktionentheorie
4. Übungsblatt

Aufgabe 4.1 Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, und seien $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetig und $f|_G$ holomorph. Beweisen Sie: Ist $f(\partial G) \subset \mathbb{R}$, so ist f konstant.

Aufgabe 4.2 Sei $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ eine Möbiustransformation mit zwei Fixpunkten $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, wobei $\alpha \neq \beta$. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig. Für $n \in \mathbb{N}$ gelte $z_n := f(z_{n-1})$. Untersuchen Sie die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz.

Definition 4.1 Unter einem verallgemeinerten Kreis versteht man einen Kreis oder eine Gerade.

Definition 4.2 Ist $K = \{\zeta \in \mathbb{C} \,|\, |\zeta - z_0| = r\}$ ein Kreis, so heißt $z^* \in \hat{\mathbb{C}}$ ein Spiegelbild eines Punktes $z \in \hat{\mathbb{C}}$ bezüglich K, wenn z und z^* auf einem von dem Anfangspunkt z_0 ausgehenden Strahl liegen und der Bedingung

$$|z - z_0||z^* - z_0| = r^2$$

genügen. Ist K eine Gerade, so heißt $z^* \in \hat{\mathbb{C}}$ ein Spiegelbild von $z \in \hat{\mathbb{C}}$ bezüglich K, falls z und z^* gleichweit von K entfernt sind und auf verschiedenen Seiten der selben Senkrechten zu K liegen.

Aufgabe 4.3 Beweisen Sie:

a) z und z^* sind genau dann Spiegelbilder voneinander bezüglich eines verallgemeinerten Kreises K, wenn jeder durch z und z^* verlaufende verallgemeinerte Kreis K' senkrecht auf K steht.

b) Sind z_1 und z_2 zwei im Bezug auf einen verallgemeinerten Kreis K spiegelbildliche Punkte, so sind auch w_1 und w_2 Spiegelbilder voneinander bezüglich $\hat{K}$, wobei z_1, z_2 und K jeweils auf w_1, w_2 bzw. $\hat{K}$ durch eine Möbiustransformation f abgebildet seien.

Aufgabe 4.4 g sei holomorph im Gebiet $G \supset \overline{B(0,1)}$. Ferner gelte $|g(z)| \leq M$ für $z \in \overline{B(0,1)}$. Beweisen Sie:

$$M|g'(0)| \leq M^2 - |g(0)|^2.$$

Hinweis: Wenden Sie das Schwarzsche Lemma auf ein geeignet definiertes $f = f(g(\cdot))$ an!

Abgabetermin: Mittwoch, 11. Juni 2008, vor 12:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.