Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Michael Pokojovy

18. Juni 2008

Funktionentheorie
5. Übungsblatt

Aufgabe 5.1 Bestimmen Sie eine Möbiustransformation $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, welche den Kreis $K = \overline{B(0,1)}$ auf den Kreis $K^* = \overline{B(i,1)}$ so abbildet, dass die Punkte 0 und 1 in $\frac{i}{2}$ bzw. 0 übergehen.

Hinweis: Verwenden Sie die in der Aufgabe 4.2 formulierte Eigenschaft der Spiegelbilder!

Aufgabe 5.2 Die Funktion f sei ganz und habe in $z_0 = \infty$ eine wesentlich singuläre Nullstelle. Zeigen Sie, dass es dann in jeder Umgebung jeder komplexen Zahl w_0 eine andere Zahl w so gibt, dass f in einer Umgebung von z_0 unendlich viele w-Stellen hat.

Hinweis: Wenden Sie den Satz von Casorati-Weierstraß auf f an!

Aufgabe 5.3 Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklungen folgender Funktionen in angegebenen Kreisringen:

a) $z \mapsto f_1(z) := \frac{1}{z(z-3)^2}$ in $K(1,1,2)$,

b) $z \mapsto f_2(z) := z^2 \sin \pi \frac{z+1}{z}$ in $K(0,0,\infty)$.

Aufgabe 5.4 Die Funktion $\mathcal{J}_n$ sei für $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, als Koeffizient bei ζ^n der Laurent-Entwicklung der Funktion $\zeta \mapsto e^{\frac{1}{2}z\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)}$ um Null definiert:

$$e^{\frac{1}{2}z\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_n(z)\zeta^n.$$

Zeigen Sie:

$$\mathcal{J}_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\theta - z\sin\theta)\mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}.$$

Bemerkung 5.1 $\mathcal{J}_n$ heißt n-te Besselsche Funktion erster Gattung. Sie erfüllt die sogenannte Besselsche Differentialgleichung

$$z^2u''(z) + zu'(z) + (z^2 - n^2) = 0 \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

welche den radialen Anteil der Laplace-Gleichung bei zylindrischer Symmetrie darstellt.

Abgabetermin: Mittwoch, 25. Juni 2008, vor 12:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.