Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Michael Pokojovy

2. Juli 2008

Funktionentheorie
6. Übungsblatt

Aufgabe 6.1 Bestimmen Sie die Residuen folgender Funktionen an all deren singulären Stellen:

a) $z \mapsto f_1(z) := \frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$,

b) $z \mapsto f_2(z) := z^3 \cos \frac{1}{z-2}$.

Aufgabe 6.2 Berechnen Sie die nachstehenden Integrale:

a) $\int_\Gamma z^n e^{\frac{2}{z}} \mathrm{d}z$, $\Gamma := \{re^{i\varphi} \,|\, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $r > 0$,

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} \mathrm{d}x$, $0 < \alpha < 1$.

Hinweis: Betrachten Sie das Integral über den Rand des Rechtecks mit den Ecken $-R$, R, $R + 2\pi i$, $-R + 2\pi i$ für $R > 0$.

Aufgabe 6.3

a) Die Menge $P_f \subset \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ der Pole einer auf $\mathbb{C}$ meromorphen Funktion f sei endlich. Ist $\{\Gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ eine Folge von stückweise glatten Jordan-Kurven um $z = 0$ mit $\Gamma_m \cap (\mathbb{Z} \cup P_f) = \varnothing$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und $\operatorname{dist}(\Gamma_m, \{0\}) \to \infty$, $m \to \infty$, dann gilt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi \sum_{z_0 \in P_f} \operatorname{res}_{z=z_0} f(z) \cot \pi z,$$

falls die Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$ konvergiert und

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\Gamma_m} f(z) \cot \pi z \,\mathrm{d}z = 0$$

gilt, wobei die Kurve Γ_m, $m \in \mathbb{N}$, jeweils entgegen dem Uhrzeigersinne umgelaufen sei.

b) Berechnen Sie:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+nb)^2}, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad b \neq 0, \quad \frac{a}{b} \notin \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 6.4

a) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein durch eine stückweise glatte Kurve berandetes beschränktes Gebiet. Die Funktionen f und g seien holomorph in $U \supset \overline{G}$, U offen. Überall auf ∂G gelte

$$|g(z)| \leq |f(z)|.$$

Beweisen Sie, dass dann die Funktionen f und $f + g$ die gleiche Anzahl von Nullstellen in G besitzen.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f_a(z) = f(z) + ag(z)$ für $|a| \leq 1$.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen des Polynoms $P(z) := z^5 - 5z^3 + 2$ in $B(0,1)$.

Hinweis: Zerlegen Sie P gemäß $P = f + g$ für geeignete f und g.

Abgabetermin: Mittwoch, 9. Juli 2008, vor 12:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.