Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Oliver Schnürer, Michael Pokojovy

Sommersemester 2010

Funktionentheorie
Präsenzübungsblatt

Aufgabe A Zeigen Sie, dass die Menge der Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ bezüglich der komponentenweisen Addition und der üblichen Matrixmultiplikation einen Körper bildet. Was sind die Null und die Eins in diesem Körper?

Aufgabe B a) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a+ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, dar: $\frac{1}{1+i}$, $\frac{2+i}{3-5i}$.

b) Berechnen Sie die Nullstellen von den komplexen Polynomen z^4+1, z^3-1.

c) Ist $x+iy \mapsto xy+ixy$ ein analytisches Polynom?

Aufgabe C Sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ ein zusammenhängendes Gebiet. Zeigen Sie, dass sich jedes Paar in Ω liegender, voneinander verschiedener Punkte z_1, z_2 durch einen Polygonzug verbinden lässt.

Aufgabe D Wir betrachten die in der Vorlesung eingeführte stereographischen Projektion

$$\mathcal{P} \colon \partial B_{\frac{1}{2}}\left(\left(0,0,\tfrac{1}{2}\right)\right) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

a) Beweisen Sie, dass das Urbild eines Kreises in der komplexen Zahlenebene unter der stereographischen Projektion wieder ein Kreis ist.

b) Weisen Sie nach, dass das Urbild einer Geraden in der komplexen Zahlenebene unter der stereographischen Projektion ein Kreis auf der Kugel ist, dem der Pol $(0,0,1)$ fehlt (dem Kreis fehlt also genau ein Punkt, dieser ist immer der Pol der Kugel $(0,0,1)$).

c) Zeigen Sie, dass das Bild eines Kreises unter der stereographischen Projektion ein Kreis oder eine Gerade in der komplexen Zahlenebene ist. Eine Gerade erhält man genau dann, wenn der Kreis in der Zahlenkugel $\partial B_{1/2}((0,\ 0,\ 1/2))$ durch den Nordpol $(0,\ 0,\ 1)$ verläuft.

Dieses Aufgabenblatt muss nicht abgegeben werden, es wird kommende Woche aber in den Übungen besprochen.