Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Oliver Schnürer, Michael Pokojovy

Sommersemester 2010

Funktionentheorie
1. Übungsblatt

Aufgabe 1.1 Sei $P\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ein komplexes Polynom in den reellen Variablen x und y. Beweisen Sie:

a) $P(x, y)$ ist genau dann analytisch, wenn $P(x + iy, 0) = P(x, y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.

b) Sind alle Koeffizienten von P reell und ist $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von P, dann ist $\bar{z}_0$ auch eine Nullstelle von P.

Aufgabe 1.2 Entwicklen Sie die folgenden komplexen Funktionen in Potenzreihen um $z = 0$:

a) $f_1(z) = \frac{1}{z^2+1}$,

b) $f_2(z) = \frac{1}{1+z}$,

c) $f_3(z) = \cos(z^2 - 1)$,

d) $f_4(z) = \frac{1}{(1-z^2)(z^2+4)}$.

Bestimmen Sie den Konverzgenzradius der zu f_1 und f_3 gehörenden Reihen.

Aufgabe 1.3 Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ heißt harmonisch, wenn $\frac{\partial^2 h(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h(x,y)}{\partial y^2} = 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt.

a) Sei $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ analytisch. Beweisen Sie, dass sowohl $\operatorname{Re} u(x, y)$ als auch $\operatorname{Im} u(x, y)$ harmonisch sind.

b) Sei h harmonisch. Zeigen Sie, dass h Realteil einer in $\mathbb{C}$ analytischen Funktion ist.

Aufgabe 1.4 Sei $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x+iy)}{x^2+y^2}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass, obwohl die Funktion f in $z = 0$ partiell differenzierbar ist und deren partiellen Ableitungen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen, keine komplexe Differenzierbarkeit von f in $z = 0$ vorliegt.

Abgabe: vor Dienstag, 27. April 2008, 14:00 Uhr, in die Briefkästen bei F411.