Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Oliver Schnürer, Michael Pokojovy

Sommersemester 2010

# Funktionentheorie
## 2. Übungsblatt

**Aufgabe 2.1** Sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion, für welche $\operatorname{Im} f \equiv 0$ in $\Omega$ gilt. Beweisen Sie, dass dann $f \equiv c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ gilt.

**Aufgabe 2.2** Sei $k \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$. Zeigen Sie für $R > 0$ die Gültigkeit von $\int_{\partial B_R(0)} z^k \mathrm{d}z = 0$, indem Sie

a) eine Stammfunktion benutzen,

b) das Integral direkt unter Verwendung einer Kurvenparametrisierung ausrechnen.

Berechnen Sie die nachstehenden Integrale mit Hilfe einer der obigen Methoden:

c) $\int_{\partial B_2(-2i)} \frac{1}{(z+i)^2} \mathrm{d}z$,

d) $\int_{\partial B_1(0)} \frac{e^z}{(z-2)^3} \mathrm{d}z$.

Alle Kurven seien dabei im Gegenuhrzeigersinn durchgelaufen.

**Aufgabe 2.3** Sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und sei $f$ eine in $\Omega$ holomorphe Funktion. Gilt $\operatorname{Re} f'(z) \neq 0$ für alle $z \in \Omega$, so ist $f$ injektiv.

**Aufgabe 2.4** Sei $f$ eine ganze Funktion und $K = \partial B_R(0)$ ein Kreis um den Ursprung. Zeigen Sie, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$f^{(k)}(0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} \mathrm{d}\zeta$$

gilt. Leiten Sie daraus die folgenden Aussagen her:

a) Der $k$-te Koeffizient $c_k$ der Taylorreihenentwicklung von $f$ lässt sich durch

$$|c_k| \leq \tfrac{1}{R^k} \cdot \max\{|f(z)| \mid z \in \partial K\}$$

abschätzen.

b) Ist $f$ ganz und gilt

$$|f(z)| \leq A + B|z|^\alpha$$

für ein $\alpha \geq 0$, so ist $f$ ein Polynom, dessen Grad höchstens $[\alpha]$ beträgt.

c) Ist $f$ ganz und beschränkt, so ist $f$ konstant.

Abgabe: vor Dienstag, 11. Mai 2008, 14:00 Uhr, in die Briefkästen bei F411.