Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Oliver Schnürer, Michael Pokojovy

Sommersemester 2010

Funktionentheorie
3. Übungsblatt

Aufgabe 3.1 Es sei $f\colon \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re} z > 0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch und beschränkt. Zeigen Sie, dass dann f für jedes $c > 0$ in $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re} z > c\}$ gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 3.2 Beweisen Sie für alle $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$ die Identitäten

a) $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$,
b) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$,
c) $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$,
d) $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$.

Aufgabe 3.3 Seien die Kurven $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathbb{C}$ durch $\gamma_1, \gamma_2\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit

$$\gamma_1\colon t \mapsto \cos(t) + i\sin(t) \text{ bzw. } \gamma_2\colon t \mapsto a\cos(t) + bi\sin(t),$$

für feste $a, b > 0$ parametrisiert. Zeigen Sie:

a) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t} \mathrm{d}t = \frac{2\pi}{ab}$,
b) $\int_{\Gamma_1} \frac{1}{z} \mathrm{d}z = \int_{\Gamma_2} \frac{1}{z} \mathrm{d}z$.

Aufgabe 3.4 Gegeben seien die folgenden Reihen

- $f_1\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$,
- $f_2\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} z^n$,
- $f_3\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

Zeigen Sie:

a) f_1, f_2, f_3 konvergieren in $B_1(0)$.
b) f_1 konvergiert überall auf $\partial B_1(0)$.
c) f_2 konvergiert nirgends in $\partial B_1(0)$.
d) f_3 konvergiert in $z = -1$ und divergiert in $z = 1$.

Aufgabe 3.5 **(Freiwillig)** Untersuchen Sie das Randkonvergenzverhalten von f_3 präziser, indem Sie

a) weitere $z \in \partial B_1(0)$ angeben, so dass die Reihe f_3 konvergiert
b) oder alle Punkte auf $\partial B_1(0)$ bestimmen, in welchen f_3 konvergiert.

Abgabe: vor Dienstag, 25. Mai 2008, 14:00 Uhr, in die Briefkästen bei F411.