Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Oliver Schnürer, Michael Pokojovy

Sommersemester 2010

Funktionentheorie
4. Übungsblatt

Aufgabe 4.1 Beweisen Sie: Ist $f\colon B_1(0) \longrightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion, welche

$$|f(z)|^2 \le 1 - |z|^2$$

für alle $z \in B_1(0)$ erfüllt, so gilt $f \equiv 0$.

Aufgabe 4.2 Die Funktion $g\colon \overline{B_1(0)} \longrightarrow \mathbb{C}$ sei analytisch. Ferner gelte $|g(z)| \le M$ für $z \in \overline{B_1(0)}$. Beweisen Sie:

$$M|g'(0)| \le M^2 - |g(0)|^2.$$

Hinweis: Wenden Sie das Schwarzsche Lemma auf ein geeignet definiertes $f = f(g(\cdot))$ an! Sie dürfen dabei ohne Beweis davon ausgehen, dass $\zeta \mapsto \frac{\zeta-\alpha}{1-\bar{\alpha}\zeta}$ den Einheitskreis $\overline{B_1(0)}$ auf sich abbildet, falls $|\alpha| < 1$ ist.

Aufgabe 4.3 Sei $\emptyset \ne G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und sei $f \in C^0(\bar{G}, \mathbb{C})$ analytisch in G und nichtkonstant. Zeigen Sie:

a) $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ nehmen ihre Maxima und Minima auf ∂G an.

b) Ist $f(z)$ ein Randpunkt von $f(G)$, dann ist z Randpunkt von G.

c) Ist $G = B_1(0)$ und gilt $f(S^1) = S^1$, so folgt $f(B_1(0)) = B_1(0)$.

Aufgabe 4.4 Beweisen Sie, dass das Bild der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ unter einer nichtkonstanten ganzen Abbildung dicht in $\mathbb{C}$ liegt.

Abgabe: vor Dienstag, 8. Juni 2008, 14:00 Uhr, in die Briefkästen bei F411.