Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Oliver Schnürer, Michael Pokojovy

Sommersemester 2010

Funktionentheorie
5. Übungsblatt

Aufgabe 5.1 a) Gibt es für feste $c_2 \geq c_1 > 0$ ein analytisches $f\colon \mathbb{C}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ so, dass f in 0 eine isolierte Singularität besitzt und

$$c_1 e^{\frac{1}{|z|}} \leq |f(z)| \leq c_2 e^{\frac{1}{|z|}}$$

für z nahe 0 erfüllt?

b) Bestimmen Sie alle analytischen $f\colon \mathbb{C}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$|f(z)| \leq \sqrt{|z|} + \frac{1}{\sqrt{|z|}}.$$

Aufgabe 5.2 a) Beweisen Sie, dass die Menge aller invertierbaren Möbiustransformationen

$$\mathbb{M} = \left\{ f\colon \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\} \,\middle|\, f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0 \right\}$$

bzgl. der Verknüpfungsoperation „$\circ$“ eine Gruppe bildet, wobei $(f \circ g)(z) = f(g(z))$.

b) Seien $z_i, w_i \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $i = 1,2,3$ mit $z_i \neq z_j$, $w_i \neq w_j$, $i \neq j$. Zeigen Sie, dass es dann genau eine Möbiustransformation f derart gibt, dass $f(z_i) = w_i$ für $i = 1,2,3$ gilt.

c) Bestimmen Sie eine Möbiustransformation, welche die Einheitskreisscheibe $B_1(0)$ auf die obere komplexe Halbebene abbildet.

Aufgabe 5.3 Die Funktion f sei ganz und habe in $z_0 = \infty$ eine wesentliche Singularität, d.h., $f(\frac{1}{z})$ habe in 0 eine wesentliche Singularität. Zeigen Sie, dass es dann in jeder Umgebung jeder komplexen Zahl w_0 eine andere Zahl w gibt, dass f in einer Umgebung von z_0 unendlich viele w-Stellen hat.

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Casorati & Weierstraß!

Aufgabe 5.4 Sei $\gamma\colon S^1 \to \mathbb{C}$ eine einfach geschlossene (injektive), glatte Kurve. Für $z \notin \operatorname{im}\gamma$ definiere $n(\gamma,z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$. Ferner sei $D := \{z \in \mathbb{C}\backslash\operatorname{im}\gamma \mid n(\gamma,z) \neq 0\}$. Beweisen Sie:

a) $n(\gamma,z) \to 0$ für $z \to \infty$.

b) $n(H(\cdot,t),z)$ ist konstant in t, wobei $H\colon S^1 \times [0,1] \to \mathbb{C}$ eine Homotopie zwischen zwei einfach geschlossenen, glatten Kurven γ_1 und γ_2 ist und $z \notin H(S^1 \times [0,1])$ fest ist.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis davon ausgehen, dass n nur ganze Werte annimmt (vgl. Theorem 10.5).

c) $z \mapsto n(\gamma,z)$ ist in $\mathbb{C}\backslash\operatorname{im}\gamma$ lokal konstant.

d) D ist offen und beschränkt.

e) $D \neq \emptyset$.

Hinweis: Konstruieren Sie eine Homotopie zwischen γ und $\partial B_1(0)$ und wenden Sie darauf b) an!

Abgabe: vor Dienstag, 22. Juni 2008, 14:00 Uhr, in die Briefkästen bei F411.