



Sommersemester 2010

Funktionentheorie 6. Übungsblatt

Aufgabe 6.1 Bestimmen Sie die Residuen folgender Funktionen an all ihren singulären Stellen:

- a) $z \mapsto f_1(z) := \frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$,
b) $z \mapsto f_2(z) := z^3 \cos \frac{1}{z-2}$.

Aufgabe 6.2 Berechnen Sie die nachstehenden Integrale:

- a) $\int_{\partial B_R(0)} z^n e^{\frac{z}{2}} dz$, $n \in \mathbb{Z}$, $R > 0$,
b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx$, $0 < \alpha < 1$.

Hinweis: Verwenden Sie das Integral über den Rand des Rechtecks mit den Ecken $-R$, R , $R+2\pi i$, $-R+2\pi i$ für $R > 0$.

- c) $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^3} dx$.

Hinweis: Approximieren Sie den geschlitzten Kreis, dem die positive reelle Achse fehlt.

Aufgabe 6.3 Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen folgender Funktionen in den angegebenen Mengen:

- a) $f_1: z \mapsto z^5 - 5z^3 + 2$ in $B_1(0)$,
b) $f_2: z \mapsto z^6 - 5z^4 + 3z^2 - 1$ in $\overline{B_1(0)}$,
c) $f_3: z \mapsto 3z^4 - \cos z$ in $B_1(0)$.

Aufgabe 6.4

- a) Lesen und bereiten Sie den angehängten Appendix (Bak & Newman, *Complex analysis*, Kap. 11.2, S. 139-141¹) so auf, dass Sie diesen in der Übung vorstellen können.
b) Berechnen Sie damit

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+nb)^2}, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad b \neq 0, \quad \frac{a}{b} \notin \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 6.5 (Freiwillig) Beweisen Sie mit Hilfe des Brouwerschen Fixpunktsatzes eine der folgenden Aussagen:

- a) Ist $X: \overline{B_R(0)} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und gilt $\langle X(z), z \rangle_{\mathbb{R}^2} \leq 0$ für alle $z \in \partial B_R(0)$, dann gibt es ein $z_0 \in \overline{B_R(0)}$ mit $X(z_0) = 0$.
Hinweis: Nehmen Sie zunächst $X(z) = -z$ auf $\partial B_R(0)$ an!
b) Es gibt keine stetige Abbildung $f: \overline{B_1(0)} \rightarrow \partial B_1(0)$ mit $f(x) = x$ für alle $x \in \partial B_1(0)$.

Abgabe: vor Dienstag, 6. Juli 2008, 14:00 Uhr, in die Briefkästen bei F411.

¹s. z.B. <http://books.google.de/books?id=ftcGs-P1nVoC&printsec=frontcover>