Unter einem Zyklus[1] Γ in $\mathbb{C}$ verstehen wir eine Kette endlich vieler geschlossener Wege. Genauer, $\Gamma := \sum\limits_{j=1}^{k} \Gamma_j$, $\Gamma_j := [\gamma_j]$, $\gamma_j \colon [0,1] \to \mathbb{C}$ glatt, $\gamma_j(0) = \gamma_j(1)$, $j = 1, \dots, k$, $k \in \mathbb{N}$.

Definition: Sei Γ ein Zyklus. Wir definieren die Windungszahl oder Index von Γ bzgl. eines Punktes $z \in \mathbb{C} \backslash \Gamma$ durch

$$\operatorname{ind}(\Gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{k} \oint_{\gamma_j} \frac{1}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta.$$

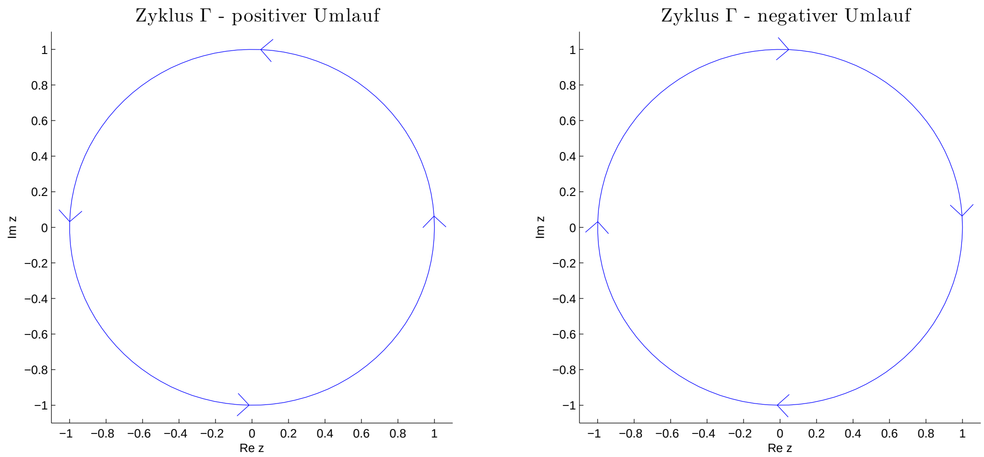
Die Mengen

$$\begin{aligned} \operatorname{Int} \Gamma &:= \{z \in \mathbb{C} \backslash \Gamma \mid \operatorname{ind}(\Gamma, z) \neq 0\}, \\ \operatorname{Ext} \Gamma &:= \{z \in \mathbb{C} \backslash \Gamma \mid \operatorname{ind}(\Gamma, z) = 0\} \end{aligned}$$

heißen das Innere (Interior) bzw. das Äußere (Exterior) des Zyklus Γ.

Bemerkung: $\operatorname{ind}(\Gamma, \cdot)$ ist immer ganzzahlig und beschreibt anschaulich die Anzahl der Umläufe von Γ um den Punkt z.

Beispiel: Sei $\Gamma := \partial B(0,1) \subset \mathbb{C}$ n-mal ($n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$) durchlaufen, d. h., für $n > 0$ wird Γ entgegen dem Uhrzeigersinn (positiver Umlauf) und für $n < 0$ im Uhrzeigersinn (negativer Umlauf) $|n|$-mal durchlaufen.



Parametrisiert man Γ durch $\gamma \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{int}$, so folgt

$$\operatorname{ind}(\Gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{\zeta} \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ine^{int}}{e^{int}} \mathrm{d}t = n.$$

Definition: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und seien Γ_1, Γ_2 Zyklen. Γ_1 und Γ_2 heißen homolog[2] in U, falls

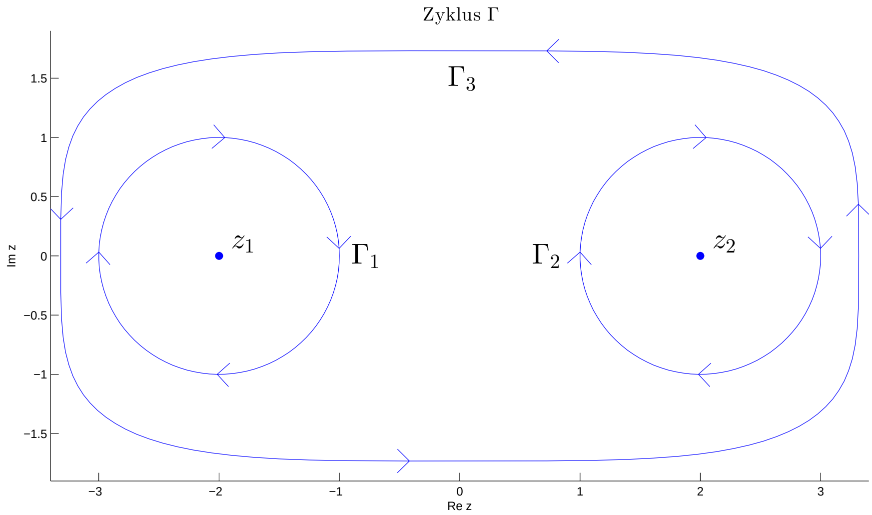
$$\operatorname{ind}(\Gamma_1, z) = \operatorname{ind}(\Gamma_2, z)$$

für alle $z \in \mathbb{C} \backslash U$ gilt.

Definition: Ein Zyklus Γ heißt nullhomolog[3], falls $\operatorname{ind}(\Gamma, z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \backslash \Gamma$ gilt.

Beispiel: Sei $U := \mathbb{C} \backslash \{z_1, z_2\}$, $z_1 \neq z_2$, und sei Γ ein Zyklus wie auf der Abbildung unten.

[1] altgriechisch.: κύκλος – Kreis.
[2] altgriechisch: ὁμός – gleich, λὸγος – Sinn.
[3] lateinisch: nullus – Keiner, altgriechisch: ὁμός – gleich, λὸγος – Sinn.



Dann gilt

$$\operatorname{ind}(\Gamma_2, z_1) = \operatorname{ind}(\Gamma_1, z_2) = 0, \quad \operatorname{ind}(\Gamma_1, z_1) + \operatorname{ind}(\Gamma_3, z_1) = 0, \quad \operatorname{ind}(\Gamma_2, z_2) + \operatorname{ind}(\Gamma_3, z_2) = 0.$$

Daher ist $\Gamma := \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ nullhomolog in U.

Definition: Sind Γ_1, Γ_2 homolog bzgl. $\mathbb{C}\backslash(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$, so sagt man, dass ihre ,,Differenz"' nullmolog ist.

Satz (Allgemeiner Cauchyscher Integralsatz):
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sei f holomorph in U. Ferner sei Γ ein nullhomologer Zyklus in U. Dann gilt $\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$.

Beweis: M. Fischer, I. Lieb (2003): Funktionentheorie, 8. Auflage, Vieweg $\square$