Beispiel zum schwarzschen Spiegelungsprinzip:

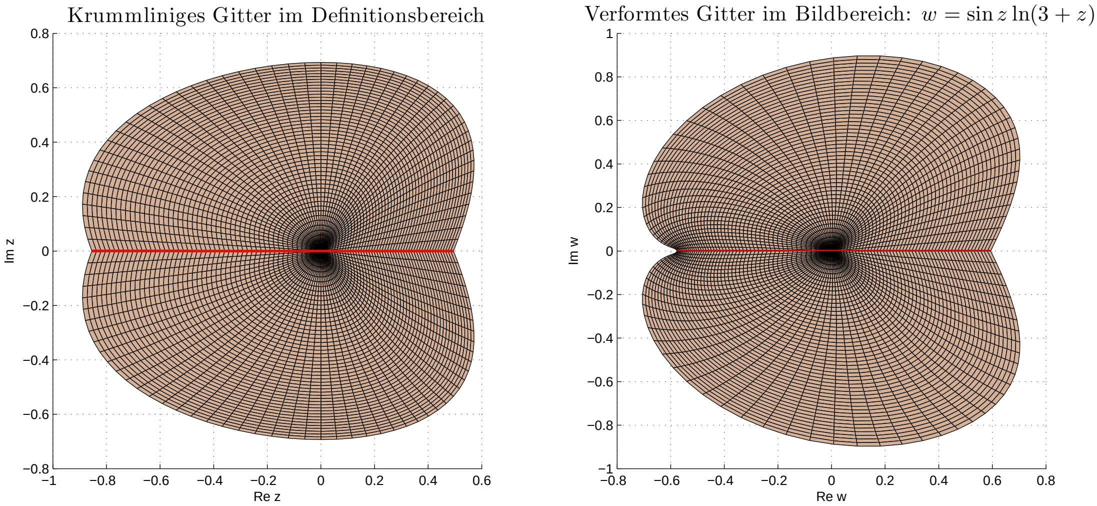

Abbildung 1

Definition (Isolierte Singularität):
Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und sei $f\colon G \to \mathbb{C}$. Ein Punkt $c \in G$ heißt eine *isolierte Singularität von* f, falls es eine offene Umgebung $U \subset G$ von c so gibt, dass f in $U \backslash \{c\}$ holomorph ist. Kann f zu einer in ganz U holomorphen Funktion fortgesetzt werden, so heißt die Singularität *hebbar*.

Satz (von Casorati & Weierstraß über Charakterisierung isolierter Singularitäten):
Seien $G \subset \mathbb{C}$ offen, $c \in G$, und sei f holomorph in $G \backslash \{c\}$. Dann liegt einer der drei folgenden Fälle vor:

1. f hat eine hebbare Singularität an der Stelle c. In diesem Fall ist f beschränkt in einer Umgebung von c.
2. Es gibt $m \in \mathbb{N}$ und $a_{-1}, \ldots, a_{-m} \in \mathbb{C}$ so, dass

$$z \mapsto f(z) - \sum_{n=1}^{m} a_{-n}(z-c)^{-n}$$

eine hebbare Singularität an der Stelle c hat. In diesem Fall gilt $|f(z)| \to \infty$ für $z \to c$.

3. Für jedes $r > 0$ ist $f(B(c,r) \backslash \{c\})$ dicht in $\mathbb{C}$.

Definition (Polstellen und wesentliche Singularität):
In obiger Situation liege Fall 2. vor. Dann heißt c ein *Pol der Ordnung* m von f[1]. Wenn Fall 3. vorliegt, heißt c eine *wesentliche Singularität von* f.

[1]Bemerkung: $\sum_{k=1}^{m} a_{-n}(z-c)^{-n}$ heißt der *Hauptteil der Laurentreihe von* f *an der Stelle* c