Beispiel 4.15 i)
Die Funktion

$$f\colon \mathbb{C}\backslash\{1\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{z}{z-1},$$

ist holomorph im Kreisring $K(1, 0, \infty)$.

- In einer der gepunkteten Umgebung $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ von 1 gilt

$$f(z) = \frac{z-1+1}{z-1} = 1 + \frac{1}{z-1},$$

  d.h., f hat einen Pol erster Ordnung in $z_0 = 1$.

- Dagegen hat die Laurentreihe von f in der Umgebung $U(0) = B(0,1)$ von 0 keinen Hauptteil, denn

$$f(z) = -z\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=1}^{\infty} z^n.$$

- In der Umgebung $U(\infty) = \hat{\mathbb{C}}\backslash\overline{B(0,1)}$ von ∞ auf der z-Ebene bzw $B(0,1)$ von 0 auf der w-Ebene gilt

$$F(w) = \frac{\frac{1}{w}}{\frac{1}{w} - 1} = \frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n,$$

  d.h. f ist holomorph in $z_0 = 0$.

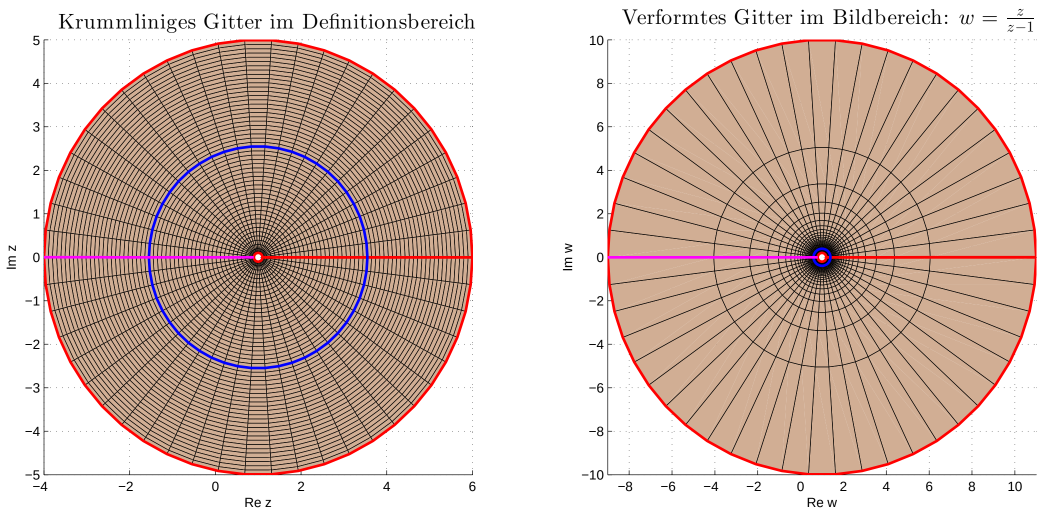

Abbildung 1

Beispiel 4.15 ii)
Die Funktion

$$f\colon \mathbb{C}\backslash\{-1, 1\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{2z}{z^2-1},$$

hat wegen

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} \qquad \text{(Partialbruchzerlegung)}$$

Pole jeweils erster Ordnung in $z_0 = -1$ und $z_0 = 1$. In der Umgebung $U(\infty) = \hat{\mathbb{C}}\backslash\overline{B(0,1)}$ von ∞ auf der z-Ebene bzw $B(0,1)$ von 0 auf der w-Ebene liegt wegen

$$F(w) = \frac{\frac{2}{w}}{\left(\frac{1}{w}\right)^2 - 1} = \frac{2w}{1-w^2} = 2w\sum_{n=0}^{\infty} w^{2n}$$

die Holomorphie von f vor.

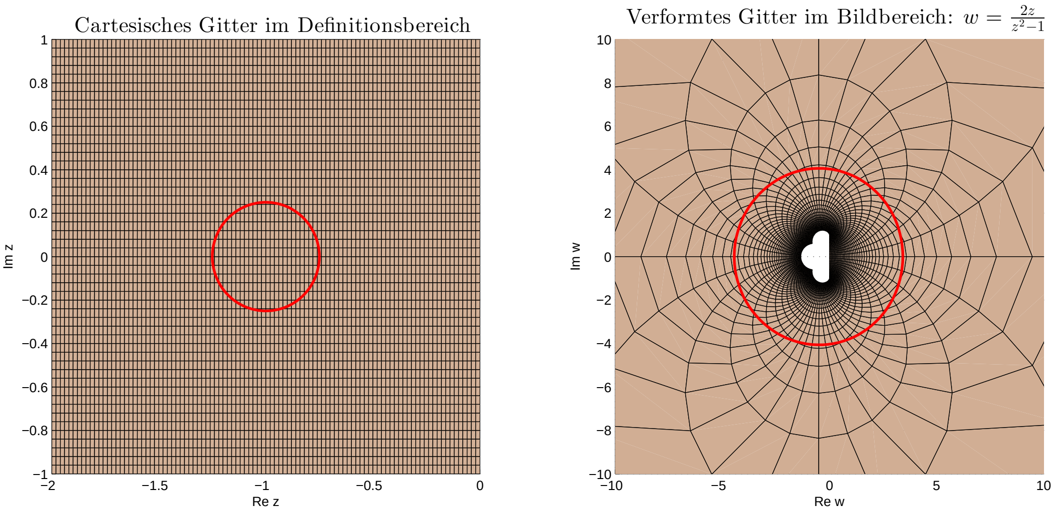

Abbildung 2

Beispiel 4.15 iii)
Die Funktion

$$f\colon \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto e^{\frac{1}{z}},$$

ist wegen

$$f(z) = \sum_{n=}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{(-n)!} z^n$$

in $z_0 = 0$ wesentlich singulär, wogegen f in ∞ holomorph ist, da $F(w) = f(\frac{1}{w}) = e^w$ in $w_0 = 0$ holomoprh ist.

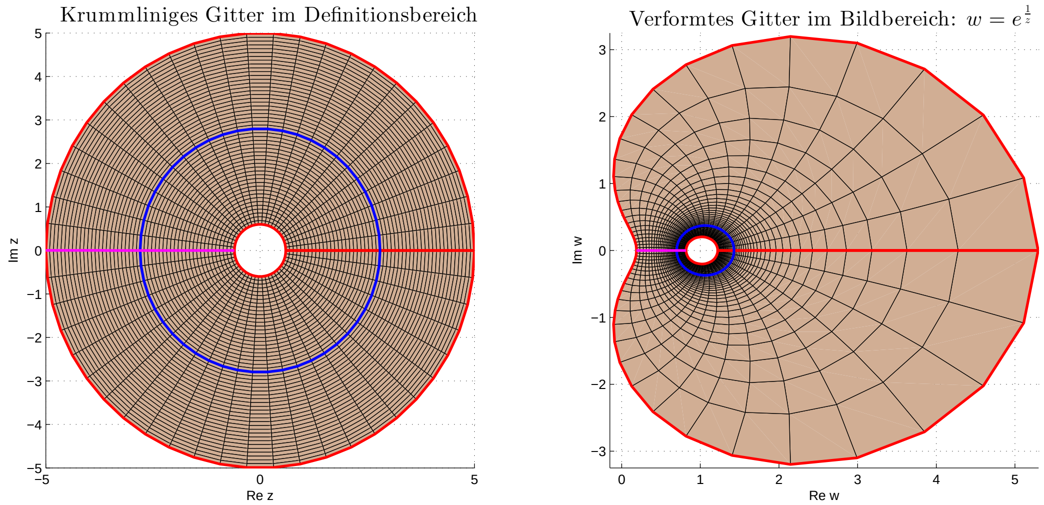

Abbildung 3

Beispiel 4.15 iv)
Die Funktion

$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sqrt{(z-1)(z+1)},$$

ist in ganz $\mathbb{C}$ definiert. In der Umgebung $U(\infty) = \hat{\mathbb{C}}\backslash\overline{B(0,1)}$ von ∞ auf der z-Ebene bzw $B(0,1)$ von 0 auf der w-Ebene gilt

$$F(w) = \sqrt{\left(\tfrac{1}{w} - 1\right)\tfrac{1}{w} + 1} = \tfrac{1}{w}\sqrt{1-w^2},$$

weshalb f in ∞ einen Pol erster Ordnung besitzt. Man beachte, dass sich $w \mapsto \sqrt{1-w^2}$ durch eine Taylorreihe in $w_0 = 0$ darstellen lässt und deswegen holomorph ist. Daher liegt in ∞ keine Verzweigung vor, während -1 und 1 Verzweigungspunkte darstellen Deshalb ist Aufschneiden längs einer Verbindungskurve zwischen -1 und 1, z.B. $[-1,1]$, nötig.

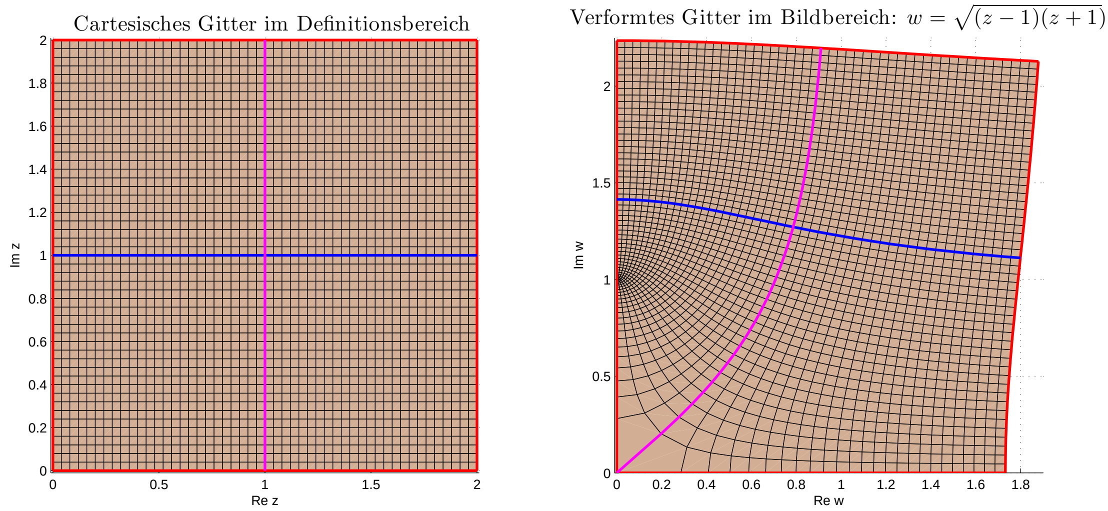

Abbildung 4

Beispiel 4.15 v)
Die Funktion

$$f\colon \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \tfrac{\sin z}{z},$$

ist holomorph in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ und hat wegen $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = 1$ eine hebbare Singularität in $z_0 = 0$. Die Laurentreihe in $K(0, 0, \infty)$ lautet

$$f(z) = \tfrac{1}{z}\left(z - \tfrac{z^3}{3!} + \tfrac{z^5}{5!} - \dots\right) = 1 - \tfrac{z^2}{3!} + \tfrac{z^4}{5!} - \dots .$$

Da f sich zu einer ganz transzendenten Funktion fortsetzen lässt, muss in $z_0 = \infty$ eine wesentliche Singularität vorliegen.

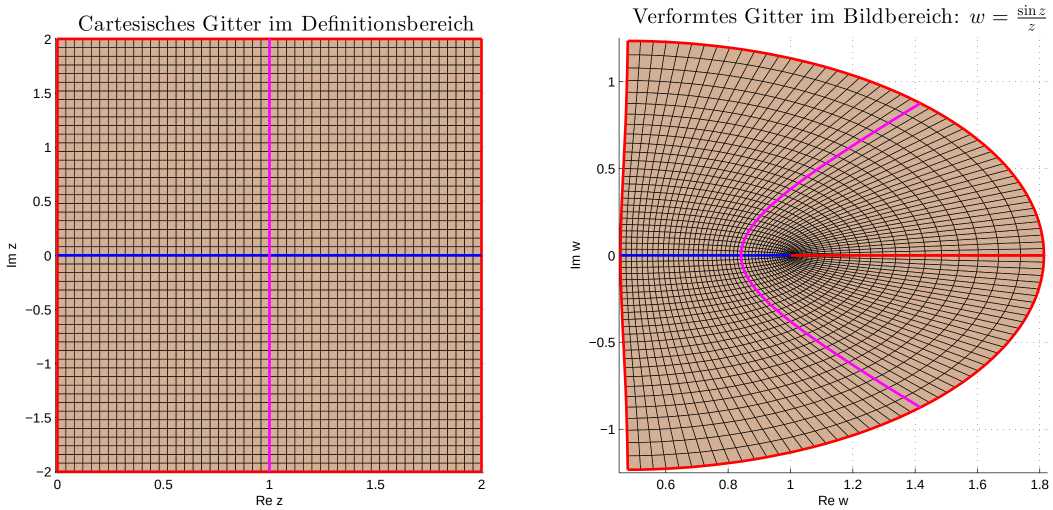

Abbildung 5