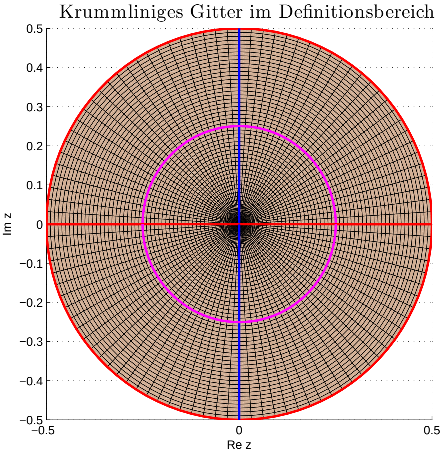
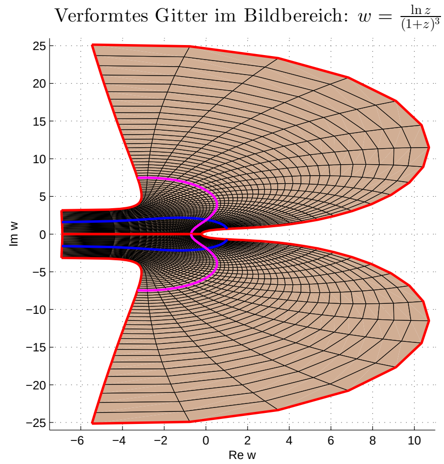
Beispiel 1 (Residuenkalkül): Es gilt: $\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^3}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}$.





Lösung:
Wir wenden den Residuensatz auf das Integral $\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$ mit $f(z) := \frac{\ln^2 z}{(1+z)^3}$ an. Zunächst zeigen wir aber, dass das Integral existiert. Unter Verwendung des Satzes von L'Hôpital folgt für jedes $\alpha > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^2 x}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln x}{x^{1+\alpha}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^{2+\alpha}} = 0.$$

Daher existert ein $K_\alpha > 1$ so, dass $\frac{\ln^2 x}{x^\alpha} \leq 1$ für $x \geq K_\alpha$. Aus Stetigkeitsgründen besitzt die nichtnegative Funktion $x \mapsto \frac{\ln^2 x}{x^\alpha}$ ein Maximum M_α auf dem Kompaktum $[1, K_\alpha]$. Insgesamt gilt

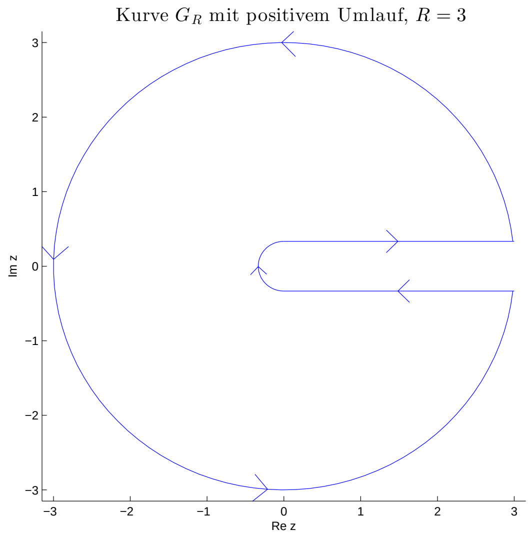
$$\ln^2 x \leq C_\alpha x^\alpha \text{ für } x \geq 1$$

mit $C_\alpha := \max\{M_\alpha, K_\alpha\}$, woraus sich die Konvergenz des Integrals $\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$ ergibt, denn

$$\int_0^\infty \left|\frac{\ln^2 x}{(1+x)^3}\right| \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln^2 x}{(1+x)^3}\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{\ln^2 x}{(1+x)^3}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \ln^2(1/x)\mathrm{d}x + C_1 \int_1^\infty \frac{x}{(1+x)^3}\mathrm{d}x$$
$$\leq C_{1/2} \int_0^1 x^{-1/2}\mathrm{d}x + C_1 \int_0^\infty (1+x)^{-2}\mathrm{d}x < \infty.$$

Analog lässt sich auch die Konvergenz von $\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^3}\mathrm{d}x$ beweisen.
Sei $R > 1$. Wir betrachten das Gebiet

$$G_R := B_R(0) \backslash \Big(\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re} z \geq 0 \text{ und } |\mathrm{Im} z| \leq \tfrac{1}{R}\} \cup \overline{B_{\frac{1}{R}}(0)}\Big).$$



Für die folgende Integration setzen wir ∂G_R aus $\Gamma_1 := \partial G_R \cap \partial B_R(0)$, $\Gamma_2 := \partial G_R \cap \partial B_{\frac{1}{R}}(0)$ und $\Gamma_3 := \partial G_R \backslash (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ zusammen. Mit dem Residuensatz folgt dann

$$\int_{\partial G_R} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \mathrm{res}_{z=-1} f(z).$$

Unter Berücksichtigung von $f(z) = \frac{b_0 + b_1(z+1) + b_2(z+1)^2 + \ldots}{(1+z)^3}$ ergibt sich

$$b_2 = \mathrm{res}_{z=-1} f(z) = \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}(\ln z)^2\Big|_{z=-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{\ln z}{z}\Big|_{z=-1} = \frac{1-\ln z}{z^2}\Big|_{z=-1} = 1 - i\pi,$$

weshalb

$$\int_{\partial G_R} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i + 2\pi^2$$

gilt. Die Ungleichung

$$|f(z)| = \left|\frac{\ln^2 z}{(1+z)^3}\right| \leq \left|\frac{(\ln|z| + i\arg z)^2}{(1+z)^3}\right| \leq \frac{2\ln^2|z| + 8\pi^2}{|1+z|^3}$$

liefert für $R \to \infty$

$$\left|\int_{\Gamma_1} f(z)\mathrm{d}z\right| \leq 2\pi R\frac{2\ln^2 R + 8\pi^2}{(R-1)^3} \to 0 \text{ und } \left|\int_{\Gamma_1} f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \frac{2\pi}{R}\cdot\frac{2\ln^2 R + 8\pi^2}{(1-\frac{1}{R})^3} \to 0.$$

Nun gilt

$$\int_{\Gamma_3} f(z)\mathrm{d}z \to \int_0^\infty \frac{(\ln x)^2 - (\ln x + 2\pi i)^2}{(1+x)^3}\mathrm{d}x = -4\pi i\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^3}\mathrm{d}x + 4\pi^2\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^3}\mathrm{d}x,$$

woraus wir

$$2\pi i + 2\pi^2 = -4\pi i\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^3}\mathrm{d}x + 4\pi^2\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^3}\mathrm{d}x$$

schließen. Zusammenfassung liefert $\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^3}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}$, denn

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^3}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2(1+x)^2}\Big|_{x=0}^{x=\infty} = \frac{1}{2}.$$

Beispiel 2 (Schwarz-Christoffel-Transformation):
Betrachte ein einfach zusammenhängendes, polygonal berandetes Gebiet G in der komplexen Ebene. Der Riemannsche Abbildungssatz impliziert, dass es eine konforme Abbildung f mit

$$f\colon \{\zeta \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}\,\zeta > 0\} \to G$$

gibt, wobei die reelle Achse auf die Kanten des Polygons ∂G abgebildet wird. Hat das Polygon innere Winkel $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, so kann man f als Schwarz-Christoffel-Transformation

$$f(z) = K\int^z \frac{1}{(\zeta - a_1)^{\alpha_1/\pi}(\zeta - a_2)^{\alpha_2/\pi}\cdot\ldots\cdot(\zeta - a_n)^{\alpha_n/\pi}}\mathrm{d}\zeta$$

wählen, wobei K konstant ist und $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ die Realteile der Eckpunkte des Polygons bezeichnen. Beispiele:

- Abbildung der oberen Halbebene auf ein Dreieck mit den Winkeln πa, πb, $\pi(1-a-b)$:

$$f(z) = \int^z \frac{1}{(\zeta-1)^{1-a}(\zeta+1)^{1-b}}\mathrm{d}\zeta.$$

- Abbildung der oberen Halbebene auf ein Quadrat:

$$f(z) = \int^z \frac{1}{\sqrt{\zeta(\zeta^2-1)}}\mathrm{d}\zeta = \sqrt{2}F\left(\sqrt{z+1}; \sqrt{2}/2\right),$$

wobei F das unvollständige elliptische Integral erster Art bezeichnet.