Skript zur Vorlesung

Kontrolltheorie für zeitabhängige partielle Differentialgleichungen

Sommersemester 2014

Michael Pokojovy

Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik und Statistik

Stand: 4. August 2014

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Das vorliegende Skript gibt den Inhalt der Vorlesung „Kontrolltheorie für zeitabhängige partielle Differentialgleichungen", gehalten im Sommersemester 2014 an der Universität Konstanz, wieder und gibt einen Überblick über kontrolltheoretische Aspekte zeitabhängiger partieller Differentialgleichungen. Wird ein unendlichdimensionales dynamisches System mit Hilfe einer partiellen Differentialgleichung modelliert, so stellt sich oft die Frage, ob und wie man sein Verhalten durch die Vorgabe sogenannter Eingangsgrößen von außen steuern kann, um einen gewünschten Zielzustand zu erreichen oder ein Kostenfunktional zu minimieren, oder um anhand von Messwerten oder Beobachtungen nicht messbare Größen bzw. Zustände zu rekonstruieren. Diese und weitere Fragestellungen treten bei vielen Anwendungen in den Naturwissenschaften, der Technik, den Wirtschaftswissenschaften usw. auf.

Nach einem Einführungskapitel über die endlichdimensionalen Systeme werden allgemeine funktionalanalytische Methoden aus der Halbgruppentheorie, spektrale Methoden und wichtige Resultate für elliptische Probleme mit inhomogenen Randbedingungen vorgestellt und anschließend bei der Untersuchung parabolischer und hyperbolischer PDGL sowie gekoppelter Systeme auf Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit, Stabilisierbarkeit, Entdeckbarkeit sowie optimale Steuerung angewendet.

Die Vorlesung richtete sich an Studierende des Hauptstudiums, insbesondere des sechsten Semesters, in den Bachelor-, Master- oder Diplomstudiengägen Mathematik, Mathematische Finanzökonomie und Physik mit elementaren Vorkenntnissen aus der Theorie partieller Differentialgleichungen.

Ein besonderer Dank gilt Frau Dipl.-Math. Karin Borgmeyer und Herrn Dipl.-Math. Marco Ritter für das Korrekturlesen des Skriptes und zahlreiche Verbesserungsvorschläge. Die möglicherweise noch enthaltenen Tippfehler sind allerdings ein Verschulden des Verfassers, für welche es um Entschuldigung gebeten wird.

Konstanz, den 4. August 2014 Michael Pokojovy

1. Einleitung

Die (mathematische) Kontrolltheorie ist eine angewandte mathematische Disziplin, welche sich nach herrschender Meinung in die Kybernetik (als Teil der interdisziplinären Wissenschaft Systemtheorie) eingliedern lässt. Obwohl die Bezeichnung „Kontrolltheorie" gewissermaßen ein Anglizismus ist, welcher dem englischen Terminus „control theory" enstammt, wird dieser Begriff mangels eines adäquateren deutschen Fachausdrucks zunehmend in den Fachkreisen akzeptiert. Die historischen Bezeichnungen „Regelungstheorie", „Technische Kybernetik" oder „Steuerungswesen" werden jedoch in den Technik- und Ingenieurwissenschaften, in der Kybernetik[1] und in den Informationswissenschaften sowie den Wirtschaftswissenschaften immer noch weitgehend gebraucht.

Allgemein gesprochen, befasst sich die Kontrolltheorie mit der Steuerung oder Regelung dynamischer Systeme, wobei es darum geht, ein System über die Steuervariablen so zu beeinflussen, dass deren Verhalten einem vorgegebenen Muster oder Plan möglichst nahe kommt (vgl. [4, Kapitel 1]).

Bei den Kontrollsystemen unterscheidet man im Wesentlichen zwischen den folgenden zwei Typen:

- **„open loop"-Systeme**: Diese kann man sich als dynamisches Objekt vorstellen, das mit seiner Umgebung in doppelter Wechselwirkung steht. Einerseits wirkt die Umgebung über die Eingangsgröße u auf das System ein. Andererseits wirkt das Systen über die Ausgangsgröße y auf seine Umgebung zurück. Da sich der Systemparameter u innerhalb gewisser Grenzen nach eigenem Belieben variieren lässt, kann man ihn dazu verwenden, das System zu steuern, weshalb er auch Steuerungsgröße genannt wird.

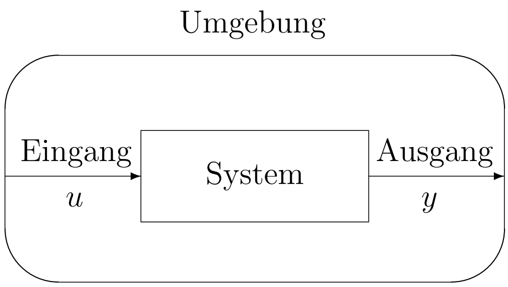

Abbildung 1: Ein „open loop"-Kontrollsystem

- **„closed loop"-Systeme**: Diese bestehen aus einem Regler und einem zu regelnden System, welches man Strecke nennt. Die Verbindung zwischen dem

[1] Kybernetik ($\kappa\upsilon\beta\varepsilon\rho\nu\acute{\eta}\tau\eta\varsigma$ – griechisch: Steuermann, Regler), eingeführt um 1945 von Norbert Wiener, ist eine naturwissenschaftliche Disziplin, die sich mit der Steuerung und Regelung von Maschinen, lebenden Organismen und sozialen Organisationen befasst.

Regler und der Stecke wird als Regelkreis oder geschlossener Kreis bezeichnet. Die Aufgabe des Reglers besteht darin, die Strecke zu beobachten und diese Beobachtung in ein Steuersignal so umzuwandeln, dass die über die Referenzgröße gelieferten Zielvorgaben an die zu kontrollierende Variable möglichst genau erfüllt sind.

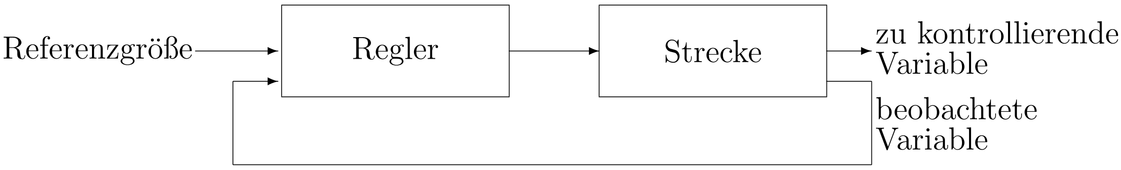

Abbildung 2: Ein „closed loop"-Kontrollsystem (Regelkreis)

1.1. Hintergründe, Historische Entwicklung und Anwendungsgebiete

Als Geburtsstunde der Kontrolltheorie (damals noch Regelungstheorie) gilt das Jahr 1868, in dem Maxwell[2] seine Arbeit *„On Governors"*[3] („Über Regler") veröffentlicht hat. Gleichwohl sei angemerkt, dass man sich mit primitiver Regeltechnik bereits in der Antike beschäftigt hatte, was sich spätestens mit dem 3. Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung datieren lässt. Aus dieser Zeit stammen die zahlreichen Erfindungen von Ktesibios[4] wie z.B. die Wasseruhr mit Zahnradgetriebe oder der Wasserstandsregler, welche uns durch sein Werk „*Περὶ τῶν πνευματικῶν*" („Pneumatik") sowie aus den späteren Überlieferungen des Heron von Alexandria[5] bekannt sind.

Zu den Vorläufern der Kontrolltheorie zählt auch die Variationsrechung, welche ihren Ursprung in der Arbeit „Acta Eruditorum" von Johann Bernoulli[6] aus dem Jahre 1696 findet. Letztere befasste sich mit dem 1638 von Galilei[7] formulierten *Brachistochrone*[8]-Problem, bei welchem nach einer reibungsfreien Bahn zwischen einem Anfangs- und einem gleich hoch oder tiefer gelegenen Endpunkt, auf der ein Massenpunkt unter dem Einfluss der Gravitationskraft am schnellsten zum Endpunkt gleitet, gesucht wird. Der Lösungsansatz basierte auf der von Newton[9] erfundenen

[2]James Clerk Maxwell, 13. Juni 1831 – 5. November 1879.

[3]J. C. Maxwell: On Governors. In: Proceedings of the Royal Society of London, vol. 16. London 1868, pp. 270–283.

[4]Ktesibios aus Alexandria (Ägypten), gelebt in der ersten Hälfte des 3. Jahrhunderts v. u. Z.

[5]Heron von Alexandria (genannt Mechanicus), genaue Lebensdaten unbekannt, vermutlich 1. Jahrhundert n. u. Z.

[6]Johann Bernoulli, 6. August 1667 – 1. Januar 1748.

[7]Galileo Galilei, 15. Februar 1564 – 8. Januar 1642.

[8]Griechisch: *βράχιστος* - kürzeste, *χρόνος* - Zeit.

[9]Isaac Newton, 4. Januar 1643 – 31. März 1727.

und in seinem berühmten Werk „Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" aus dem Jahre 1687 beschriebenen Infinitesimalrechnung. Dem Brachistochrone-Problem gingen zwar das von Euklid[10] in seinem Werk „$\Sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\tilde{\iota}\alpha$" („Elemente") gelöste Problem nach der kürzesten Verbindung zwischen zwei Punkten sowie das von Zenodoros[11] in „$\Pi\varepsilon\rho\grave{\iota}$ $\acute{\iota}\sigma o\pi\varepsilon\iota\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho\omega\nu$ $\sigma\chi\eta\mu\acute{\alpha}\tau\omega\nu$" („Über isoperimetrische Figuren") studierte Didosche[12] Problem voraus, diese wurden aber in erster Linie nur aus geometrischer Sicht betrachtet.

Im Jahre 1744, also 48 Jahre nach Bernoullis „Acta Eruditorum", befasste sich Euler[13] mit einem allgemeineren Minimierungsproblem für das Funktional

$$J(x) := \int_0^T L(t, x(t), \dot{x}(t))\mathrm{d}t \tag{1.1}$$

unter zusätzlichen Randbedingungen an x, zu dessen Lösung er seine bekannte Eulersche Gleichung, heute Euler-Lagrange[14]-Gleichung genannt, herleitete. Diese Methode wurde danach von Lagrange zur sogenannten δ-Rechnung weiterentwickelt, wobei man unter δ die Variation des Funktionals, d.h. die Gâteaux[15]-Ableitung, versteht. Die eigentliche Bezeichnung „Variationsrechnung" ist erst 1756 nach Eulers Vortrag an der Königlich-Preußischen Akademie der Wissenschaften in Berlin entstanden.

In den 50er Jahren des letzten Jahrhunderts erfuhr die Variationsrechnung revolutionäre Transformationen, was zur Abzweigung der „optimal control theory" (Theorie der Optimalen Steuerung oder Optimale Kontrolltheorie) zu einer unabhängigen Disziplin führte. So hat Bellman[16] anstatt des Funktionals (1.1) ein Minimierungsproblem für das von einem Kontrollparameter $u \in \mathcal{U}$ abhängige Funktional

$$J(x, u) := \int_0^T g(t, x(t), u(t))\mathrm{d}t + G(x(T)) \tag{1.2}$$

unter der dynamischen Nebenbedingung

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \text{ für } t \in (t_0, T), \quad x(t_0) = x_0 \tag{1.3}$$

betrachtet und dafür sein Optimalitätsprinzip hergeleitet, welches heute als Hamil-

[10] Euklid von Alexandria, gelebt im 3. Jahrhundert v. u. Z.
[11] Zenodoros, gelebt im 2. Jahrhundert v. u. Z.
[12] Dido (auch Elissa oder Elyssa) war der Gründungslegende Karthagos nach eine phönizische Prinzessin. Nach Virgils Erzählung in seiner „Aeneis" (ca. 20 v. u. Z.) hatte ihr der Numidierkönig Iarbas so viel Land versprochen, wie sie mit einer Kuhhaut umspannen konnte. Sie hat die Aufgabe dadurch gelöst, dass sie die Kuhhaut zu einem Seil gemacht und damit einen Kreis geformt hatte.
[13] Leonhard Euler, 15. April 1707 – 18. September 1783.
[14] Joseph-Louis de Lagrange, 25. Januar 1736 – 10. April 1813.
[15] René Eugène Gâteaux, 5. Mai 1889 – 3. Oktober 1914.
[16] Richard Bellman, 29. August 1920 – 19. März 1984.

ton[17]-Jacobi[18]-Bellman-Gleichung bekannt ist. Diese lautet

$$\dot{V}(x,t) = -\min_u \big(\nabla V(x,t) \cdot f(t,x,u) + g(t,x,u)\big) =: -\mu(t,x), \quad V(x,T) = G(x),$$

wobei V die sogenannte „value function" oder indirekte Nutzenfunktion ist. Der Wert $V(x_0,t_0)$ entspricht dem Minimum des Funktionals J, welches für die optimale Trajektorie x^* als Lösung zu

$$\dot{x} = f(t, x(t), \mu(t,x)) \text{ für } t \in (t_0,T), \quad x(t_0) = x_0$$

sowie die optimale Kontrolle

$$u^*(t) := \mu(t, x^*(t))$$

erreicht wird. Diese Minimierungsmethode wird oft Dynamische Programmierung[19] genannt.

Eine Reihe weiterer wichtiger Resultate wurde 1962 von Pontryagin[20] und seinen Mitarbeitern und Mitarbeiterinnen erzielt. So liefert das Pontryaginsche Prinzip eine notwendige Optimalitätsbedingung für das Kontrollproblem (1.2)–(1.3). Konkret besagt es in seiner einfachsten Form: Ist $u^* \in \mathcal{U}$ eine optimale Kontrolle und $x^* \in C^1([t_0,T])$ die zugehörige optimale Trajektorie, so muss für das Hamilton-Funktional

$$H(x,\lambda,u,t) = \lambda^T(t) f(x,u,t) + g(t,x,u)$$

die Sattelpunktungleichung

$$H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \leq H(x^*(t), u, \lambda^*(t), t), \quad \forall u \in \mathcal{U}, \quad t \in [t_0,T]$$

gelten, wobei λ^* die optimale Kozustandstrajektorie bezeichnet.

In den letzten Jahrzehnten wurden die meisten obiger Resultate auch auf partielle Differentialgleichungen, stochastische (partielle) Differentialgleichung etc. übertragen.

Die Anwendungsgebiete der Kontrolltheorie sind sehr zahlreich und vielfältig. Dazu zählen insbesondere:

- Technik und Ingenieurwissenschaften: Steuerungs- und Regelungsaufgaben in der Luft- und Raumfahrt, Steuerung der Prozesse industrieller Fertigung (in chemischen Anlagen, Kernreaktoren u.a.), Stabilisierung elektrischer Netzwerke, Steuerung von Robotern, Manipulatoren und anderen Maschinen etc.

---

[17] William Rowan Hamilton, 4. August 1805 – 2. September 1865.
[18] Carl Gustav Jacob Jacobi, 10. Dezember 1804 – 18. Februar 1851.
[19] Eine bekannte Anekdote besagt, dass diese Namensgebung der Tatsache zu verdanken ist, dass es in den 50er Jahren viel einfacher war, Finanzierung vom US-Militär für Computerprojekte als für mathematische Forschungthemen zu bekommen. Andererseits könnte der Begriff „Programm" den Terminus „Operation" aus der Operationsforschung im Hintergrund haben.
[20] Lev Semenovich Pontryagin, 3. September 1908 – 3 Mai. 1988.

- Experimentelle Naturwissenschaften: Hochenergiephysik (Aufrechterhaltung konstanter Bedingungen über einen längeren Zeitraum), Rekonstruktion nichtbeobachtbarer Größen, Parameterschätzung, inverse Probleme usw.

- Informatik und Informationswissenschaften: Steuerung der Datenflüsse, Signalverarbeitung und -steuerung etc.

- Wirtschafts- und Sozialwissenschaften: Optimale Steuerung der Wirtschafts- und Finanzprozesse, Differentialspiele, Risikomanagement und -hedging, Koordination der Sozialprozesse, Vorhersage, Planung der sozialwirtschaftlichen Abläufe usw.

- Biologie und Medizin: Steuerung und Beobachtung der Populationsdynamik, Steuerung und Beobachtung von Epidemien und Epizootien, Planung und Steuerung von Heileingriffen und Therapien, Steuerung und Beobachtung pharmakokinetischer und -dynamischer Prozesse, nichtinvasive Diagnostik usw.

1.2. Zentrale Begriffe und Fragestellungen

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $t_0 \in I$ und seien X, U Banach[21]räume. Ferner seien $f\colon I \times X \times U \to X$ und $x \in X$. Die Kontrolltheorie beschäftigt sich mit dem abstrakten Cauchyproblem

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), u(t)) \text{ für } t \in I, \quad y(t_0) = x, \tag{1.4}$$

dessen rechte Seite von einem Parameter $u\colon I \to U$ abhängt, welchen wir die *Kontrolle*, die *Steuerung*, den *Eingang*, die *Strategie* oder das *Input* nennen werden. Da die Kontrollfunktionen sowohl gewisse technische Bedingungen (z.B. Integrierbarkeit) erfüllen als auch weitere gewünschte Eigenschaften besitzen müssen (z.B. Posititivität, Beschränktheit usw.), wird üblicherweise vorausgesetzt, dass $u \in \mathcal{U}$ gilt, wobei $\mathcal{U} \subset U^I := \{f \,|\, f\colon I \to U\}$ die *Menge der Eingangsfunktionen* heißt. Die zugehörige Lösung $y\colon I \to X$, falls sie in einem entsprechenden Sinn existiert, heißt die *Zustandsvariable* und wird in machen Quellen auch *Augang* oder *Output* genannt. Der Raum X wird gelegentlich als *Zustandsraum* bezeichnet.

Obwohl diese Fragestellung eine gewisse Verwandtschaft mit der klassischen Theorie parameterabhängiger gewöhnlicher Differentialgleichungen aufweist, bei denen der Parameter u seine Werte in einer endlichdimensionalen Menge annimmt, z.B. $X = \mathbb{R}^n$, $U = \mathbb{R}^m$,

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), u) \text{ für } t \in I, \quad y(t_0) = x,$$

ist die Problematik der Kontrolltheorie von anderer Natur, da der Raum U nun in der Regel unendlichdimensional ist.

[21]Stefan Banach, 30. März 1892 – 31. August 1945.

Im Wesentlichen unterscheidet man bei den Kontrollfunktionen zwischen den folgenden zwei Typen:

(i) Die *„open loop"*-Kontrollen (Regelungen mit offener Rückführung oder Steuerungen) $u\colon I \to U$ sind Funktionen, für die die Gleichung (1.4) im gewissen Sinne – klassisch, stark, mild oder schwach – lösbar ist.

(ii) Die *„closed loop"*-Kontrollen (Regelungen mit geschlossener Rückführung oder Regelungen) lassen sich dagegen mit einer Abbildung $k\colon X \to U$ assoziieren, welche man den *Feedback* oder die Rückkopplung nennt und für welche das Cauchyproblem

$$\dot{y}(t) = f(y(t), k(y(t))) \text{ für } t \in I, \quad y(t_0) = x \tag{1.5}$$

wohlgestellt ist. Hier hat man formal $u := k(y)$ gesetzt und f als zeitunabhängig angenommen.

1.1 Bemerkung. Neben dem Cauchyproblem (1.4) können auch weitere Klassen von Gleichungen studiert werden, z.B. *Differenzengleichungen*

$$y_{k+1} = f(t_k, y_k, u_k) \text{ für } k = 0, \ldots, n, \quad y_0 = x,$$

für welche die Menge I diskret ist und die Ableitung formal durch einen Differenzenquotienten ersetzt wird, oder *stochastische Differentialgleichungen*, z.B. in $X := \mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{d}y_t = f(t, y_t, u_t)\mathrm{d}t + g(t, y_t, u_t)\mathrm{d}W_t \text{ für } t \in I, \quad y_{t_0} = x,$$

wobei $(W_t)_{t \in I}$ eine n-dimensionale Brownsche Bewegung bezeichnet und x eine Zufallszall ist. Im Folgenden werden wir uns aber auf Gleichungen vom Typ (1.4) konzentrieren.

Die zentrale Aufgabe der Kontrolltheorie besteht darin, die Kontrollstrategien so zu bestimmen, dass das Output gewünschte Eigenschaften hat. Die Fragestellungen können dabei sehr unterschiedlich sein. Nachstehend werden einige typische Fragen aufgeführt.

- **Kontrollierbarkeit oder Steuerbarkeit**: Ein Zustand $z \in X$ heißt *erreichbar* von x zum Zeitpunkt $T \in I$, falls es eine „open loop"-Kontrolle $u \in \mathcal{U}$ so gibt, dass für die Ausgangsfunktion $y \in C^0(I, X)$ die Bedingungen $y(t_0) = x$, $y(T) = z$ gelten. Liegt diese Eigenschaft für alle $x, z \in X$ vor, so nennt man das Kontrollsystem (1.4) *kontrollierbar* oder *steuerbar zum Zeitpunkt* T. Wenn dies für alle $T \in I$ gilt, so heißt das System *kontrollierbar* oder *steuerbar*.

  In manchen Situation werden anstelle dieser Eigenschaft auch schwächere Analoga betrachtet. So heißt ein System *Null-steuerbar zum Zeitpunkt* T (analog

Null-steuerbar), falls der Zustand $z = 0$ aus jedem Anfangszustand $x \in X$ erreichbar ist. Ein System heißt *partiell steuerbar zum Zeitpunkt* T (analog *partiell steuerbar*), falls es eine Projektion P auf einen abgeschlossenen Unterraum von X so gibt, dass $P \circ y$ jeden Zustand $z \in P(X)$ erreicht. Das System (1.4) heißt *approximativ steuerbar zum Zeitpunkt* T (analog *approximativ steuerbar*), falls es zu jedem $z \in X$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine „open loop"-Kontrolle so gibt, dass dass das Output y die Bedingungen $y(t_0) = x$, $\|y(T) - z\|_X < \varepsilon$ erfüllt.

- **Stabilisierbarkeit**: Bei den „closed loop"-Kontrollproblemen ist folgende Frage von besonderem Interesse. Sei $I := [t_0, \infty)$. Für gewisse $\bar{x} \in X$, $\bar{u} \in U$ gelte $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$. Eine Funktion $k\colon X \to U$ mit $k(\bar{x}) = \bar{u}$ heißt *stabilisierender Feedback*, falls $\bar{x}$ ein stabiler (bzw. asymptotisch stabiler oder gleichmäßig, z.B. exponentiell, stabiler) stationärer Punkt des Cauchyproblems

$$\dot{y}(t) = f(y(t)), k(y(t))) \text{ für } t \geq t_0, \quad y(t_0) = x \tag{1.6}$$

ist. Während die Frage nach der Stabilität bereits in der Theorie gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen zentral war, wird nun zusätzlich gefragt, ob es für das gegebene $\bar{x}$ eine „closed loop"-Kontrolle so gibt, dass das Problem (1.6) den Punkt $\bar{x}$ als stabilen stationären Punkt hat.

- **Beobachtbarkeit**: Ein vergleichbar wichtiger Begriff, welcher für lineare Systeme mit der Kontrollierbarkeit im Sinne der „Dualität" eng verwandt ist, ist der Begriff der Beobachtbarkeit. So wird zu gegebenem $t \in I$ nicht der Zustand $y(t)$, sondern $h(y(t))$ für ein $h\colon X \to Y$ *beobachtet* oder gemessen, wobei Y ein weiterer Banachraum ist. Damit betrachtet man die Gleichungen

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), u(t)) \text{ für } t \in I, \quad y(t_0) = x, \tag{1.7}$$
$$w(t) = h(y(t)) \text{ für } t \in I. \tag{1.8}$$

Gleichung (1.8) heißt *Beobachtungsgleichung*. Das System (1.7)–(1.8) heißt *beobachtbar auf* I, falls man anhand der bekannten Funktionen u und w auf I den ganzen Zustand y eindeutig bestimmen kann. Es wird oft noch zusätzlich gefordert, dass y stetig von (u, w) in gewisser Topologie abhängt, was sich dadurch berechtigt, dass sich Beobachtungen oder Messungen in der Praxis nur mit einer gewissen Genauigkeit durchführen lassen.

Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass manche Systeme durch Beobachtungen beeinflusst werden, wie z.B. in der Quantenphysik (Heisenbergsche Unschärferelation), Soziologie und Psychologie, Medizin usw. Für diese wird Gleichung (1.7) zu

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), u(t), w(t)) \text{ für } t \in I, \quad y(t_0) = x. \tag{1.9}$$

In den meisten physikalischen Anwendungen wird dieser Einfluss jedoch vernachlässigt.

- **Stabilisierbarkeit eines partiell beobachtbaren Systems**: Wenn man bei einem Stabilisierungsproblem noch zusätzlich fordert, dass der stabilisierende Feedback nicht von y, sondern von w abhängt, so wird die Aufgabe noch komplizierter. Dies führt zum „closed loop"-System

  $$\dot{y}(t) = f(y(t), k(h(y(t)))) \text{ für } t \geq t_0, \quad y(t_0) = x. \tag{1.10}$$

  Die Frage nach Stabilisierbarkeit von (1.10) ist bei partiellen Differentialgleichungen (z.B. Randstabilisierung) besonders schwierig.

- **Realisierung**: Für die Gleichung (1.7)–(1.8) wird oft ein *Realisierungsproblem* betrachtet, welches wie folgt formuliert wird.

  Zu einem gegebenen Anfangswert $x \in X$ liefert das System (1.7)–(1.8) eine Abbildung $\mathcal{R}\colon u \mapsto h \circ y$, genannt *Input-Output-Abbildung*. Welche Eigenschaften hat die Abbildung $\mathcal{R}$? Wann existiert zu einer vorgegebenen Abbildung $\mathcal{R}$ ein System vom Typ (1.7)–(1.8), welches wir *Realisierung* nennen? Wie lautet die „einfachste" Form von $\mathcal{R}$?

- **Optimale Steuerung**: Neben den Fragen stukturellen Charakters tauchen nicht weniger oft Optimalitätsfragen auf.

  So sucht man oft bei sogenannten *zeitoptimalen* Problemen für kontrollierbare (zu den Zeiten $\widetilde{I} \subset I$) Systeme nach einer Kontrollfunktion, die das System in den gewünschten Zustand $z \in X$ zur minimalen Zeit $T \in \widetilde{I}$ überführt. In anderen Situationen sucht man zu gegebenem $T \in I$ nach einer Kontrollfunktion, die das Funktional

  $$\int_0^T g(t, y(t), u(t))\mathrm{d}t + G(y(T))$$

  für gegebene Funktionen $g\colon I \times X \times U \to \mathbb{R}$, $G\colon X \to \mathbb{R}$ minimiert. Im Gegensatz zu den aus der Analysis II bekannten Optimierungsproblemen handelt es sich dabei um eine unendlichdimensionale Optimierungsaufgabe, welche besonders kompliziert ist, falls bereits X und U unendlichdimensional sind, was z.B. bei partiellen Differentialgleichungen der Fall ist. Diese Fragestellung weist eine gewisse Ähnlichkeit mit den Variationsaufgaben auf.

- **Inverse Probleme**: Bei inversen Problemen geht es darum, anhand der Beobachtungen, die Funktion f zu bestimmen oder zu schätzen (parametrisch oder nichtparametrisch). Bei partiellen Differentialgleichungen kann man auch die Frage nach der Geometrie des Gebietes stellen. Inverse Probleme sind mathematisch sehr anspruchsvoll und oft nicht einmal wohlgestellt, weshalb man nach entsprechenden Regularisierungen suchen muss.

1.2 Bemerkung. Eine besonders interessante Spezialklasse der Kontrollsysteme bilden die *Differentialspiele*, bei welchen die Kontrollfunktion mehrdimensional ist und von mehreren Spielern gewählt werden darf, die in der Regel eigene egoistische Strategien verfolgen oder auch Koalitionen bilden können. In diesem Fall kann man Gleichung (1.4) in der Form

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), u_1(t), \ldots, u_n(t)) \text{ für } t \in I, \quad x(t_0) = x$$

schreiben, wobei u_k die Strategie des k-ten Spielers bezeichnet. Die gesamte Kontrollfunktion $(u_1, \ldots, u_n)$ nennt man eine Partie, falls sie eine Lösung y zulässt. Zu den typischen Aufgaben der Differentialspieltheorie gehören u.a. die Suche nach Gleichgewichten (z.B. nach Nash[22]) sowie optimalen Strategien usw.

1.3 Bemerkung. Eine Querverbindung zur Kontrolltheorie gibt es auch in der Statistischen Qualitätssicherung (auch Qualitätskontrolle genannt). Dort wird unter anderem ein diskreter uni- oder multivariater Zufallsprozess $(X_t)_{t=1,\ldots,n}$ betrachtet, für welchen man mit gewisser Signifikanz $\alpha \in (0, 1)$ bestimmen muss, ob dieser stationär ist, ob alle Zufallsvektoren (modulo einer Transformationsgruppe) eine vorgegebene gemeinsame Verteilung besitzen usw. Dies kann parametrisch, dabei mit vorgegebenen Parametern oder retrospektiv, oder nichtparametrisch geschehen. Interessierte werden auf das Lehrbuch von S. Vardeman, J. M. Jobe, *Statistical Quality Assurance Methods for Engineers*, John Wiley & Sons, New York (1999) verwiesen.

1.3. Beispiele

Nachstehend werden einige Anwendungsbeispiele vorgestellt.

1.4 Beispiel (Wattscher[23] Regler)**.** Der Wattsche Regler, patentiert im Jahre 1788, ist ein Fliehkraftregler, also ein Maschinenelement, das die Fliehkraft zur Regelung der Drehzahl einer Maschine benutzt. Nachstehend wird ein Fliehkraftregler graphisch[24] dargestellt. Zur mathematischen Modellierung führen wir folgende Bezeichnungen ein. Sei J das Trägheitsmoment des Schwungrads einer Dampfmaschine mit einer Rotationsgeschwindigkeit ω. Die grundlegenden Bewegungsgleichungen lauten dann

$$J\dot{\omega}(t) = u(t) - p(t),$$

wobei u und p das durch den Dampfablass bzw. die Gewichte entstehende Moment bezeichnen. Die Rolle des Wattschen Reglers ist es, die Dampfmaschine zu *stabilisieren*, indem eine sogenannte *negative Rückkopplung* ins System eingebaut werden soll.

[22] John Forbes Nash, Jr., geboren am 13. Juni 1928.
[23] James Watt, 30. Januar 1736 – 25. August 1819.
[24] J. C. Maxwell: On Governors. In: Proceedings of the Royal Society of London, vol. 16. London 1868, pp. 270–283. Quelle: Wikimedia Commons.

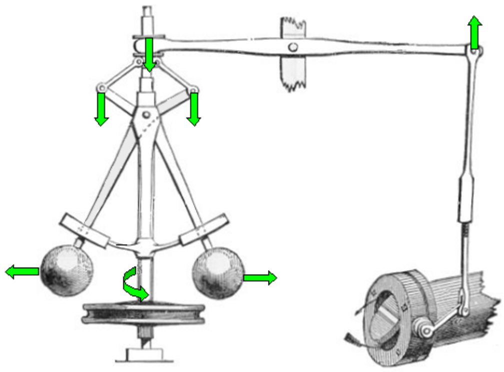

Abbildung 3: Wattscher Fliehkraftregler

Technisch gesehen, besteht ein Wattscher Regler aus zwei Hebeln, die symmetrisch zueinander an einer vertikalen Stange befestigt sind und an deren Enden zwei Gewichte jeweils der Masse m fixiert sind (vgl. Abbildung[25] 4). Die Stange drehe sich mit einer konstanten Geschwindigkeit $\nu > 0$ um die vertikale Achse. Mit φ bezeichnen wir den Winkel zwischen den Hebeln und der Stange. Dieser ist gleich dem Winkel zwischen der Stange, an der eine Muffe beweglich montiert ist, und den Stäben, welche die Hebel stützen und mit der Muffe verbunden sind. Die Position

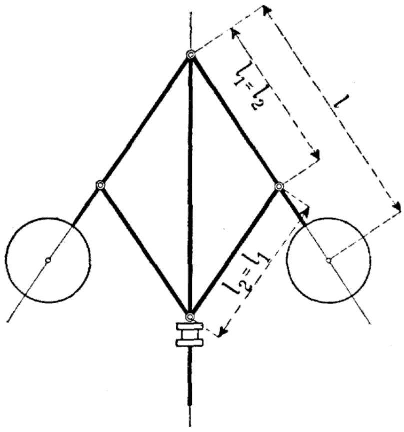

Abbildung 4: Schematische Darstellung des Wattschen Reglers

der Muffe bestimmt die Intensität der Dampfabfuhr. Wird mit b der Koeffizient der Reibungskraft am Kniehebel und mit g die Erdbeschleunigung bezeichnet, so lautet die Differentialgleichung für den Winkel φ

$$m\ddot{\varphi}(t) = m\nu^2\omega^2(t)\sin\varphi(t)\cos\varphi(t) - mg\sin\varphi(t) - b\dot{\varphi}(t).$$

Für den *Feedback* (oder die *Rückkopplung*) u benutzen wir einen Ansatz der Form

$$u = J(\bar{u} + k(\cos\varphi - \cos\bar{\varphi}))$$

[25] O. Lueger: Lexikon der gesamten Technik, 2. Auflage 1904–1920. Quelle: Wikimedia Commons.

für noch zu bestimmende konstante Parameter $\bar{u}, \bar{\varphi}, k \in \mathbb{R}$. Führt man eine neue Variable $\psi = \dot{\varphi}$ ein, so kann man das Problem auf ein System erster Ordnung transformieren:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= \psi(t), \\ \dot{\psi}(t) &= \nu^2\omega^2(t)\sin\varphi(t)\cos\varphi(t) - g\sin\varphi(t) - \tfrac{b}{m}\psi(t), \\ \dot{\omega}(t) &= k\cos\varphi(t) + \big(\bar{u} - \tfrac{1}{J}\,p(t) - k\cos\bar{\varphi}\big). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Wir nehmen ferner an, dass p konstant ist und dass Gleichung (1.11) $(\varphi_0, \psi_0, \omega_0)^T$ als stationären Punkt hat.

(i) **Stabilitätsaspekte:** Ist der stationäre Zustand stabil oder sogar asymptotisch stabil? Was ist ggf. die Stabilitätsrate?

(ii) **Robuste Stabilität:** Wenn p seine Werte in einem vorgegebenenem Intervall annimmt, in welchen Intervallen müssen die restlichen Parameter variieren, damit der stationäre Zustand stabil bzw. asymptotisch stabil ist?

Während erstere Fragestellung auf Maxwell zurückgeht und sich nach Linearisierung mithilfe des klassischen Stabilitätskriteriums von Routh[26] & Hurwitz[27] beantworten lässt, hat die zweite Frage erst im Jahre 1978 ihre Lösungen in den Arbeiten von Kharitonov[28] gefunden. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass es immer noch nicht gelungen ist, die Resultate von Kharitonov auf *retardierte* Differentialgleichungen (auch Differenzen-Differentialgleichungen oder *Delay*-Differentialgleichungen genannt) zu übetragen, was von einem hohen Komplexitätsgrad des Problems zeugt.

1.5 Beispiel (Sanfte Landung)**.** Wir betrachten ein Raumschiff der (zeitabhängigen) Masse M, welches sich entlang der vertikalen Achse so bewegt, dass seine Schubdüse zur Landungsfläche gerichtet ist. Die Funktion h beschreibe die Höhe des Raumschiffes über der Landungsfläche. Ferner bezeichne u die durch den Gasausstoß aus der Düse resultierende Schubkraft, wobei das Gas durch die Verbrennung des Kraftstoffes entsteht. Der Verbrauch des Treibstoffes verringert die Gesamtmasse des Raumschiffes, während die Schubkraft zur Massenverringerungsrate proportional ist. Unter der Annahme, dass man den Atmosphärendruck vernachlässigen darf und die Fallbeschleunigung konstant ist, führt das Zweite Newtonsche Gesetz zu folgendem System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$M\ddot{h}(t) = -gM(t) + u(t), \tag{1.12}$$

$$\dot{M}(t) = -ku(t) \tag{1.13}$$

[26] Edward John Routh, 20. Januar 1831 – 7. Juni 1907.
[27] Adolf Hurwitz, 26. März 1859 – 18. November 1919.
[28] Vladimir Kharitonov.

mit den Anfangsbedingungen

$$M(0) = M_0 > 0, \quad h(0) = h_0 > 0, \quad \dot{h}(0) = h_1 \tag{1.14}$$

und einem Faktor $k > 0$.

Als Nebenbedingung wird verlangt, dass die Kontrollfunktion u sowie die Zustandsvariable M den Ungleichungen

$$0 \leq u(t) \leq \alpha \text{ für } t \in [0, T], \quad M(t) \geq m \text{ für } t \in [0, T] \tag{1.15}$$

genügen, wobei $m > 0$ die Masse des Raumschiffes ohne Treibstoff bezeichnet und $\alpha > 0$ vorgegeben ist.

Folgende Kontrollprobleme können betrachtet werden:

(i) **Sanfte Landung**: Zu einer gegebenen Landungszeit $T > 0$ bestimme eine Steuerung u so, dass die Lösung (M, h) zu (1.12)–(1.15) die Ungleichung

$$h(t) \geq 0 \text{ für } t \in [0, T]$$

sowie die Endbedingung

$$h(T) = \dot{h}(T) = 0$$

erfüllt. Bei dieser Aufgabe handelt es sich um ein Steuerbarkeitsproblem.

(ii) **Minimaler Kraftstoffverbrauch**: Substituiert man $v := \dot{h}$, so folgt unter der Annahme $M(t) > 0$ für $t \in [0, T]$

$$\frac{\dot{M}(t)}{M(t)} = -k\dot{v}(t) - gk \text{ für } t \in [0, T],$$

woraus sich durch Integration

$$M(T) = e^{-v(T)k - gkT + v(0)k} M(0)$$

ergibt. Demnach findet eine sanfte Landung zum Zeipunkt $T > 0$ (d.h. $v(T) = 0$) genau dann statt, wenn

$$M(T) = e^{-gkT} e^{h_1 k} M_0 \text{ gilt.}$$

Daher ist, die Landungszeit $T > 0$ zu minimieren, damit gleichbedeutend, dass der für die Landung erforderliche Kraftstoffverbrauch $M(0) - M(T)$ minimiert wird.

1.6 Beispiel (Raumschiff als Festkörper)**.** Das Raumschiff wird nun als Festkörper und nicht als materieller Punkt angenommen, welcher sich um einen festen dreidimensionalen Punkt O bezüglich eines Inertialsystems dreht. In Bezug auf dieses Koordinatensystem lautet die Bewegungsgleichung

$$\dot{H}(t) = F(t), \tag{1.16}$$

worin H den Drehimpuls und F die durch $2r$ Düsenjets entstehende Drehkraft bezeichnen, wobei die Düsenjets symmetrisch zueinander bzgl. O stationiert sind. Ein Beispiel für den Fall $r = 1$ wird in Abbildung 5 illustriert[29]. Die Drehkraft F schreibt

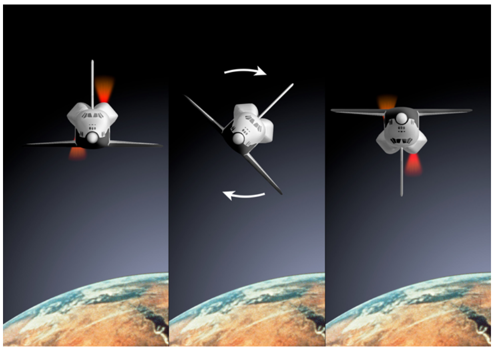

Abbildung 5: „Reaction Control System" eines Raumschiffes

sich zu

$$F = \sum_{k=1}^{r} u_k b_k,$$

wobei $b_1, \ldots, b_r$ vorgegebene Richtungsvektoren sind und $u_1, \ldots, u_r$ die jeweiligen (betragsmäßigen) Schubkräfte darstellen.

Mit (e_1, e_2, e_3) und (r_1, r_2, r_3) bezeichnen wir die orthonormalen Basen des Inertialsystems bzw. des mitrotierenden Koordinatensystems. Ferner gibt es genau eine Matrix R, für die $r_i = Re_i$ für $i = 1, 2, 3$ gilt und die eindeutig die Position des Körpers bestimmt. Sei Ω die Winkelgeschwindigkeit gemessen in Bezug auf das Inertialsystem, während sich die Winkelgeschwindigkeit im rotierenden System als $\omega = R\Omega$ berechnet. Es lässt sich ferner zeigen, dass

$$\dot{R}(t) = S(\omega(t))R(t) \text{ mit } S(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \text{ gilt.} \tag{1.17}$$

Wird mit J die Trägheitsmatrix bezeichnet, so ist der Drehimpuls H durch $H = R^{-1}J\omega$ gegeben. Setzt man diese Gleichung in die Bewegungsgleichung ein, so ergibt sich

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R^{-1}(t)J\omega(t)) = \sum_{k=1}^{r} u_k(t) b_k.$$

[29]Quelle: National Air and Space Museum, Smithsonian Institution.

Multipliziert man die Gleichung mit R und benutzt die Produktregel

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(R(t)(R^{-1}(t)J\omega(t))\big) = \dot{R}(t)R^{-1}(t)J\omega(t) + R(t)\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(R^{-1}(t)J\omega(t)\big),$$

so folgt wegen $\dot{R}(t) = S(t)R(t)$ die Eulersche Gleichung

$$J\dot{\omega}(t) = S(t)J\omega(t) + R(t)\sum_{k=1}^{r} u_k(t)b_k.$$

Der gesamte Zustand des rotierenden Objekts wird daher durch das System

$$\begin{aligned} J\dot{\omega}(t) &= SJ(t)\omega(t) + R(t)\sum_{k=1}^{r} u_k(t)b_k, \\ \dot{R}(t) &= S(t)R(t) \end{aligned}$$

eindeutig bestimmt.

(i) **Steuerbarkeit:** Kann man zu einem gegebenen Anfangszustand (R_0, ω_0) und einem vorgeschriebenen Endzustand $(R_1, 0)$ *Kontrollfunktionen* $u_1, \dots, u_r$ so bestimmen, dass die zugehörige Lösung (R, ω) die Bedingungen

$$(R, \omega)(t = 0) = (R_0, \omega_0), \quad (R, \omega)(t = T) = (R_1, 0)$$

für ein vorgegebenes $T > 0$ erfüllt?

(ii) **(Partielle) Stabilisierbarkeit:** Kann man $u_1, \dots, u_r$ als Feedback-Kontrollen unabhängig von der Anfangsdrehgeschwindigkeit so wählen, dass die Drehbewegung mit der Zeit abnimmt?

(iii) **Zeitoptimale Steuerung:** Überführe das System in den gewünschten Zielzustand zum baldmöglichsten Zeitpunkt, wobei sich der Treibstoffverbrauch in vorgegebenen Grenzen halten soll.

(iv) **Energieoptimale Steuerung:** Minimiere den Kraftstoffverbrauch für die Überführung des Systems zwischen zwei gegebenen Zuständen.

1.7 Beispiel (Elastischer Körper)**.** Ein homogener, isotroper elastischer Körper mit den Lamé-Konstanten $\lambda, \mu > 0$ und gleichmäßiger Dichte $\rho > 0$ belege im spannungslosen Referenzzustand ein Gebiet Ω des $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$. Die Mengen Γ_0, Γ_1 seien relativ offen in $\Gamma := \partial\Omega$ und erfüllen $\Gamma = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1$. Mit $U(t, x)$ bezeichnen wir den Verschiebungsvektor am Ort $x \in \Omega$ zum Zeitpunkt $t \geq 0$. Unter der Annahme, dass auf den Körper keine Volumenkräfte wirken, ergeben sich die *Elastizitätsgleichungen* (oder Gleichungen der Elastodynamik) für das Vektorfeld U:

$$\rho U_{tt}(t, x) - \mu \triangle U(t, x) - (\mu + \lambda)\nabla \mathrm{div} U(t, x) = 0 \text{ für } (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega \qquad (1.18)$$

Es seien die Anfangsverschiebung U^0 bzw. -geschwindigkeit U^1 bekannt:

$$U(0, \cdot) = U^0, \quad U_t(0, \cdot) = U^1.$$

Ferner sei der Körper am Teil Γ_0 des Randes befestigt, d.h.

$$U(t, x) = 0 \text{ für } (t, x) \in (0, \infty) \times \Gamma_0.$$

(i) **Randsteuerbarkeit**: Kann man den Spannungsvektor p am Teil Γ_1 des Randes, d.h.

$$\mu \nabla U(t, x)^T n(x) + (\mu + \lambda)(\mathrm{div} U(t, x))n(x) = p(t, x) \text{ für } (t, x) \in (0, \infty) \times \Gamma_1,$$

so vorschreiben, dass das System zum vorgegebenen Zeitpunkt $T > 0$ den gewünschten Zustand erreicht?

- Was sind die „richtigen" Funktionenräume für die Anfangs- und Enddaten, die Lösung und die Randsteuerung?
- Ist die geometrische Konfiguration des Tripels $(\Omega, \Gamma_0, \Gamma_1)$ für die Existenz der Kontrollfunktion ausschlaggebend?
- Wie groß muss der Zeitpunkt $T > 0$ sein? Beachte, dass dies ein hyperbolisches System ist, weshalb die Signale endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit haben.

(ii) **Randbeobachtbarkeit**: Ist es möglich, den ganzen Verlauf $U(t, \cdot)$ für alle $t \in [0, T]$ zu rekonstruieren, wenn man z.B. „nur" $U_t|_{\Gamma_1}(t, \cdot)$ für alle $t \in [0, T]$ messen kann?

(iii) **Inverses Problem**: Angenommen, der elastische Körper ist anisotrop, d.h. $\mu = \mu(x)$, $\lambda = \lambda(x)$. Ist es möglich, die Lamé-Parameter zu rekonstruieren, indem man U (oder eine von U abgeleitete Größe) über Γ_1 beobachtet? Wie viele Beobachtungen sind nötig? Wie zuverlässig ist die Schätzung?

1.8 Beispiel (Kernreaktor)**.** Wir betrachten ein einfaches Modell eines Kernreaktors. Ein Kernreaktor ist eine Anlage, in der bestimmte nukleare Reaktionen, z.B. Kernspaltungsprozesse, mit einer hohen Intensität durchgeführt werden[30]. Der Druckbehälter des Reaktors enthalte ein radioaktives Mittel (z.B. Uran 235), welches ein *schwach absorbierendes* Medium forme. Die im Laufe der Kernspaltung entstehenden Neutronen diffundieren gemäß dem Fickschen[31] Gesetz:

$$j = -D \nabla N,$$

[30] Quelle: `http://www.energie-lexikon.info`

[31] Adolf Gaston Eugen Fick, 22. Februar 1852 – 11. Februar 1937.

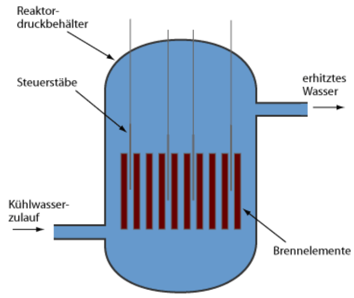

Abbildung 6: Schematische Darstellung eines Kernreaktors

wobei N die Neutronendichte, j die Neutronenflussdichte und D den Diffusionskoeffizienten bezeichnen. Die durch die Kernspaltung entstehende Wärme folge dem Fourierschen[32] Gesetz der Wärmeleitung

$$j_q = -\lambda \nabla T,$$

wobei T die (relative) Temperatur gemessen bzgl. einer Referenztemperatur T_0, j_q die Wärmeflussdichte und λ die Wärmeleitzahl bezeichnen. Sei $\tau > 0$ die (konstante) mittlere Zeitdauer, die zwischen dem Zeitpunkt, an dem ein Neutron kreiert wurde, und dem Zeitpunkt, an dem es zum Wärmeneutron wird, vergeht. Da die Dichte der inneren Neutronenquelle durch

$$\tfrac{k\tau}{T_0} \triangle N + \tfrac{k}{T_0} N \text{ mit dem Thermodiffusionskoeffizienten } k$$

gegeben ist und die Anzahl der absorbierten Neutronen $\frac{k}{T_0} N$ lautet, folgt aus der Kontinuitätsgleichung für N

$$N_t = \operatorname{div} j + \Big(\tfrac{k\tau}{T_0} \triangle N + \tfrac{k}{T_0} N\Big) + \tfrac{k}{T_0} N = \big(D + \tfrac{k\tau}{T_0}\big) \triangle N + \tfrac{k-1}{T_0} N \text{ in } (0, \infty) \times \Omega.$$

Wird mit ρ die Massendichte und mit c die Wärmekapazität des Mediums bezeichnet, so folgt aus der Entropiebilanz

$$c\rho T_t + \operatorname{div} j_q = Q \text{ in } (0, \infty) \times \Omega,$$

wobei wir die Wärmequelle Q proportional zur Neutronenquellendichte mit einem Faktor $\gamma > 0$ annehmen:

$$Q = \gamma \Big(\tfrac{k\tau}{T_0} \triangle N + \tfrac{k}{T_0} N\Big).$$

Insgesamt ergibt sich also ein gekoppeltes System parabolischer Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} N_t &= \big(D + \tfrac{k\tau}{T_0}\big) \triangle N + \tfrac{k-1}{T_0} N && \text{in } (0, \infty) \times \Omega, \\ c\rho T_t &= \lambda \triangle T + \gamma \big(\tfrac{k\tau}{T_0} \triangle N + \tfrac{k}{T_0} N\big) && \text{in } (0, \infty) \times \Omega. \end{aligned}$$

[32] Jean Baptiste Joseph Fourier, 21. März 1768 – 16. Mai 1830.

Für $\Gamma := \partial\Omega$ gelte wieder $\Gamma = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1$. Als Randbedingungen wählt man z.B.

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\partial N}{\partial \nu} = \alpha(N - a) && \text{auf } (0,\infty) \times \Gamma_0 && \text{(Neutronenabsorption durch die Steuerstäbe)},\\
&\tfrac{\partial N}{\partial \nu} = 0 && \text{auf } (0,\infty) \times \Gamma_1 && \text{(Keine Neutronenabsorption durch die Flüssigkeit)},\\
&\tfrac{\partial T}{\partial \nu} = 0 && \text{auf } (0,\infty) \times \Gamma_0 && \text{(Kein Wärmeaustausch mit den Steuerstäben)},\\
&\tfrac{\partial T}{\partial \nu} = \kappa(T - b) && \text{auf } (0,\infty) \times \Gamma_1 && \text{(Abkühlung durch die Flüssigkeit)},
\end{aligned}$$

wobei ν den äußeren Einheitsnormalenvektor an Ω bezeichnet. Die Konstanten $\alpha > 0$ und $\kappa > 0$ ergeben sich aus dem Newtonschen Radiations- bzw. Abkühlungsgesetz und a bzw. b stehen für eine Referenzkonzentration bzw. -temperatur. Entsprechend seien auch Anfangsbedingungen gegeben.

(i) **Randsteuerbarkeit**: Durch Manipulation der aus einem neutronenabsorbierenden Material, z.B. Bor, bestehenden Steuerstäbe (und damit der Funktion a) am Teil Γ_0 des Randes sowie der Zufuhr einer gekühlten Flüssigkeit (z.B. Wasser) an den Teil Γ_1 des Randes (und damit der Funktion b) überführe die Funktionen N und T in einen gewünschten Zustand zur kürzesten Zeit $T > 0$ so, dass $N \geq 0$ gilt.

(ii) **Stationarität**: Wird das System ab dem Zeitpunkt T in diesem Zustand bleiben, sobald man die Steuerung aussetzt?

(iii) **Optimale Steuerung:** Maximiere den Energiegewinn unter gewissen „Toleranzbedingungen" usw.

1.9 Beispiel (Populationsmodell mit Alterstruktur)**.** Wir wollen eine biologische Population einer zweigeschlechtlichen Spezies modellieren. Die Originalversion des nachstehend vorgestellten Modells, allerdings mit diskretem Altersparameter, wurde 1945 von Leslie[33] in seinem berühmten Biometrika-Artikel[34] präsentiert.

Zur Vereinfachung sei angenommen, dass es genauso viele weibliche wie männliche Individuen gibt. Ferner hänge die Lebenserwartung nicht vom Geschlecht ab. Die Konstante $a^\dagger > 0$ bezeichne die maximal mögliche Lebensdauer in der Population. Die Funktion $[0,\infty) \times [0,a^\dagger] \ni (t,a) \mapsto p(t,a) \in [0,\infty)$ beschreibe die Gesamtanzahl der Individuen im Alter a zum Zeitpunkt t. Die Funktion $[0,a^\dagger] \ni a \mapsto p^0(a) \in [0,\infty)$ sei vorgegeben und gebe die Anzahl der Individuen im Alter a zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ an.

Die Funktionen $m\colon [0,a^\dagger] \to \mathbb{R}$ und $n\colon [0,a^\dagger] \to \mathbb{R}$ seien vorgegeben und beschreiben die Mortalitäts- bzw. Fertilitätsrate – Sterbe- bzw. Geburtenrate – pro

[33] Patrick H. Leslie

[34] Leslie, P.H. (1945) "The use of matrices in certain population mathematics". Biometrika, 33(3), 183–212.

Polutionseinheit bzw. pro weiblicher Populationseinheit im Alter a. Die Funktion $u\colon [0,\infty) \times [0, a^\dagger] \to \mathbb{R}$ beschreibe die Migrationsrate (die Differenz zwischen Ein- und Auswanderung).

Die Zustandsfunktion p genügt dann folgendem System partieller Integrodifferentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \partial_t p(t,a) + \partial_a p(t,a) - m(a)p(t,a) &= u(t,a), \\ p(t,0) - \tfrac{1}{2}\int_0^{a^\dagger} n(a)p(t,a)\mathrm{d}a &= 0, \\ p(0,a) &= p_0(a). \end{aligned} \tag{1.19}$$

Dabei ist die Funktion u ein Kontrollparameter.

Folgende Kontrollprobleme können von praktischem Interesse sein:

(i) **Steuerbarkeit der Altersstruktur**: Bestimme die Funktion u (z.B. über die Migrationspolitik) so, dass die Population zum vorgegebenen Zeitpunkt $T > 0$ eine gewünschte Altersstruktur hat. Dies könnte hilfreich sein, um konkrete Ziele bei der Planung der Renten- oder Krankenversicherung zu erreichen.

(ii) **Optimale Steuerung der Altersstruktur**: Minimiere die kumulierte Haushaltsbelastung durch die Sozialausgaben beschrieben durch das Funktional

$$J(p,u) = \int_0^T \int_0^{a^\dagger} r(t,a)p(t,a)\mathrm{d}a\mathrm{d}t - \int_0^T \int_0^{a^\dagger} e(t,a)u(t,a)\mathrm{d}a\mathrm{d}t$$

unter der Nebenbedingung

$$u_0(t,a) \le u(t,a) \le u_1(t,a),$$

wobei $r(t,a)$ die Nettoeinnahmen von einem Bürger im Alter a zum Zeitpunkt t bemisst (positiv für Leistungsträger, negativ für Leistungsempfänger) und $e(t,a)$ die Aufwendungen für migrationsfördernde Maßnahmen beziffert.

Abschließend stellen wir eine Modifikation des klassischen Beispiels aus der Stochastischen Kontrolltheorie vor, welches auf Merton[35] zurückgeht.

1.10 Beispiel (Optimales Portfolio)**.** Wir betrachten ein einfaches Marktmodell mit einem Risky Asset S_t und einem Bond B_t für $t \in [0,T]$. Die zeitliche Evolution der Preisprozesse sei durch folgendes System stochastischer Differentialgleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S_t &= \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t, \\ \mathrm{d}B_t &= r B_t \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

[35]Robert Carhart Merton, geb. 31. Juli 1944.

wobei r, μ und σ den Leitzins, den Markt-Drift sowie die -Volatilität beschreiben und $(W_t)_{t\in[0,T]}$ die eindimensionale Brownsche Bewegung bezeichnet. X_t sei das zum Zeitpunkt $t \in [0,T]$ verfügbare Vermögen und $s_t \in [0,1]$ sei die Sparrate. Zum Zeitpunkt $t \in [0,T]$ wird also $(1-s_t)X_t$ verbraucht und s_tX_t gespart.

Sei $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ eine Filtrierung von σ-Algebren. Unter einem Portfolio verstehen wir einen $\mathcal{F}$-adaptierten Prozess $(\pi_t, s_t)_{t\in[0,T]}$, wobei $s_t\pi_t$ und $s_t(X_t - \pi_t)$ die Höhe der Investitionen ins Risky Asset bzw. den Bond zum Zeitpunkt t bezeichnet. Der Liquidationswert $X_t^{\pi,s}$ der Strategie genügt dann der stochastischen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_t^{\pi,s} &= s_t(rX_t + (\mu - r)\pi_t)\mathrm{d}t + \sigma s_t \pi_t \mathrm{d}W_t, \\ X_0^{\pi} &= \pi_0 S_0 + (X_0 - \pi_0)B_0. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Wir nennen das Portfolio $(\pi_t, s_t)_{t\in[0,T]}$ zulässig, falls Gleichung (1.20) durch einen an $\mathcal{F}$ adaptierten Zufallsprozess so lösbar ist, dass $X_t^{\pi,s} \geq 0$, $s_t \in [0,1]$ und $0 \leq \pi_t \leq X_t$ fast sicher gilt.

(i) **Maximaler Endnutzen**: Zum *relativen Risikoaversionsparameter* $\gamma \in (0,1)$ definieren wir die Nutzenfunktion $U(x) := x^\gamma$, $x \geq 0$. Das Portfolio soll nun so gewählt werden, dass der erwartete Nutzen des Vermögens des Investors zum Endzeitpunkt $T > 0$ maximal ist, d.h., man maximiere das Funktional

$$\mathbb{E}\big[U((1-s_T)X_T^{\pi,s})\big]$$

über alle zulässigen Portfolios $(\pi_t, s_t)_{t\in[0,T]}$.

(ii) **Optimaler Verbrauch**: Zu einer Diskontierungsrate $\beta > 0$ bestimme ein zulässiges Portfolio, das den diskontierten kumulativen Nutzen

$$\int_0^T e^{-\beta t}\mathbb{E}\big[U\big((1-s_t)X_t^{\pi,s}\big)\big]\mathrm{d}t$$

maximiert. Demnach hat der Verbrauch im jungen Alter viel mehr „Wert” als im höheren Alter, was sowohl subjektiv als auch objektiv der Realität nahe ist.

2. Elemente der klassischen Kontrolltheorie

Sei $I := [t_0, T]$, $t_0, T \in \mathbb{R}$, oder $I := [t_0, \infty)$, $t_0 \in \mathbb{R}$, ein Intervall. Ferner seien X, Y, U Banachräume und seien $A\colon I \to L(X, X)$, $B\colon I \to L(U, X)$, $C\colon I \to L(X, Y)$ Familien linearer, beschränkter Operatoren. Die klassische Kontrolltheorie befasst sich mit Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)u(t) \text{ für } t \in I, \quad y(t_0) = x \in X \tag{2.1}$$

zusammen mit der *Beobachtungsgleichung*

$$w(t) = C(t)y(t) \text{ für } t > t_0.$$

Während man in Analysis III unter einer Lösung zu (2.1) eine stetig differenzierbare Funktion versteht, bilden absolutstetige, schwach differenzierbare etc. Funktionen die üblichen Lösungsklassen in der Kontrolltheorie.

2.1 Bemerkung. Im Rahmen der klassischen Theorie werden $X = \mathbb{R}^n$, $U = \mathbb{R}^m$, $Y = \mathbb{R}^k$ als übliche euklid[36]ische (Hilbert[37])räume gewählt. In diesem Fall wird Gleichung (2.1) oft als *System mit „lumped parameters"*[38] bezeichnet. Die Operatoren $A(t)$, $B(t)$ und $C(t)$ lassen sich dann als Matrizen $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{k\times n}$ auffassen.

2.1. Wichtige Funktionenräume

2.1.1. Abstrakte C^k-Räume

Seien X und Y normierte Räume. Zunächst sei an den klassischen Stetigkeitsbegriff erinnert.

2.2 Definition. Sei $U \subset X$ eine nichtleere Menge und $f\colon U \to Y$ eine Abbildung.

(i) Die Funktion f heißt *stetig an der Stelle* $x_0 \in U$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so gibt, dass für alle $x \in U$ mit $\|x - x_0\|_X < \delta$

$$\|f(x) - f(x_0)\|_Y < \varepsilon \text{ gilt.}$$

(ii) Die Funktion f heißt *stetig (in U)*, falls sie in jedem $x_0 \in U$ stetig ist.

[36]Euklid von Alexandria, gelebt wahrscheinlich im 3. Jahrhundert v. u. Z.
[37]David Hilbert, 23. Januar 1862 – 14. Februar 1943.
[38]System mit konzentrierten Parametern.

Wir definieren die Räume der stetigen bzw. stetigen beschränkten Funktionen

$$C^0(U,Y) := \{f\colon U \to Y \mid f \text{ stetig}\} \text{ bzw.}$$
$$C^0_b(U,Y) := \{f\colon U \to Y \mid f \text{ stetig, beschränkt}\}$$

und die Norm

$$\|f\|_{C^0_b(U,Y)} := \sup_{x\in U} \|f(x)\|_Y.$$

Die Räume $C^0(U,Y)$ und $C^0_b(U,Y)$ sind Vektorräume. Ist Y ein Banachraum und liegt U zwischen einer offenen Menge und deren Abschluss, so ist der Raum $C^0_b(U,Y)$ ein Banachraum. Ist U kompakt, so ist auch $\big(C^0(U,Y), \|\cdot\|_{C^0_b(U,Y)}\big)$ ein Banachraum.

2.3 Definition. Sei $U \subset X$ offen und sei $f\colon U \to Y$ eine Abbildung.

(i) Die Funktion f heißt *Gâteaux*[39]*-differenzierbar an der Stelle* $x_0 \in U$, falls es ein $A(x_0) \in L(X,Y)$ so gibt, dass

$$\lim_{\mathbb{R}\ni h\to 0} \frac{f(x_0+hv)-f(x_0)}{h} = A(x_0)v \text{ in } Y$$

für jedes $v \in \partial B(0,1) \subset X$ gilt. Man schreibt dann $\mathrm{d}f(x_0,\cdot) := \big(A(x_0)\,(\cdot)\big)$.

(ii) Die Funktion f heißt *Fréchet*[40]*-differenzierbar an der Stelle* $x_0 \in U$, falls die obige Konvergenz gleichmäßig bzgl. $v \in \partial B(0,1) \subset X$ vorliegt. Schreibweise: $f'(x_0) := A(x_0)$.

(iii) Die Funktion f heißt *Gâteaux-* bzw. *Fréchet-differenzierbar in* U, falls sie in jedem $x_0 \in U$ Gâteaux- bzw. Fréchet-differenzierbar ist.

2.4 Satz (Übung). *Sei $U \subset X$ offen und sei $f\colon U \to Y$ eine Abbildung.*

(i) *Ist f Fréchet-differenzierbar in $x_0 \in U$, so ist f auch Gâteaux-differenzierbar in x_0.*

(ii) *Die Fuktion f ist genau dann Fréchet-differenzierbar in $x_0 \in U$, wenn es ein $A \in L(X,Y)$ sowie ein offenes $V \subset X$ mit $0_X \in V$, $x_0 + V \subset U$ und $r \in C^0(V,Y)$ mit $r(0) = 0$ so gibt, dass*

$$f(x_0+h) = f(x_0) + Ah + \|h\|_X r(h) \textit{ für alle } h \in V \textit{ gilt.}$$

2.5 Definition (C^k-Räume). Sei $U \subset X$ offen und sei $f\colon U \to Y$ eine Abbildung.

[39] René Eugène Gâteaux, 5. Mai 1889 – 3. Oktober 1914
[40] Maurice René Fréchet, 2. September 1878 – 4. Juni 1973.

(i) Für $k \geq 1$ definiert man $f \in C^k(U, Y)$, falls für die Fréchet-Ableitung $f' \in C^{k-1}(U, L(X, Y))$ gilt. Ferner setzt man

$$\|f\|_{C_b^k(U,Y)} := \max\{\|f'\|_{C_b^{k-1}(U,L(X,Y))}, \|f\|_{C_b^0(U,Y)}\}$$

falls $f \in C_b^{k-1}(U, Y)$ und $f' \in C_b^{k-1}(U, L(X, Y))$.

(ii) Für $k \geq 1$ schreibt man $f \in C^k(\bar{U}, Y)$, falls sich f bzw. f' zu einem Element von $C^0(\bar{U}, Y)$ bzw. $C^{k-1}(\bar{U}, Y)$ fortsetzen lassen. Analog definiert man $f \in C_b^k(\bar{U}, Y)$, falls die Fortsetzungen von f bzw. f' in $C_b^0(\bar{U}, Y)$ bzw. $C_b^{k-1}(\bar{U}, Y)$ liegen. In diesem Fall setzt man

$$\|f\|_{C_b^k(U,Y)} := \max\{\|f'\|_{C_b^{k-1}(U,L(X,Y))}, \|f\|_{C_b^0(U,Y)}\}, \quad \|f\|_{C_b^k(\bar{U},Y)} := \|f\|_{C_b^k(U,Y)}.$$

(iii) Außerdem sei

$$C^\infty(U, Y) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(U, Y), \quad C^\infty(\bar{U}, Y) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\bar{U}, Y).$$

$C_b^k(U, Y)$ und $C_b^k(\bar{U}, Y)$ sind Banachräume. Ist U offen und relativ kompakt, so ist $C^k(\bar{U}, Y) = C_b^k(\bar{U}, Y)$.

2.1.2. Banachraumwertige Lebesgue- und Sobolevräume

Sei X ein Banachraum und sei $I \subset \mathbb{R}^d$ ein Quader, d.h. $I = \prod_{k=1}^{d} I_k$, wobei $I_k \subset \mathbb{R}$ ein Intervall – (halb)offen oder abgeschlossen, beschränkt oder unbeschränkt – ist.

2.6 Definition. Sei $f\colon I \to X$ eine Abbildung.

(i) Die Abbildung f heißt *einfache Funktion*, falls sie sich in der Form

$$f = \sum_{k=1}^{n} x_k \chi_{A_k}$$

darstellen lässt, wobei $n \in \mathbb{N}$ eine feste Zahl ist, $x_k \in X$ und $A_k \subset I$ Lebesgue[41]-messbare Mengen mit $\lambda(A_k) < \infty$ für $k = 1, \dots, n$ sind.

(ii) Lassen sich die Mengen A_k als Quader wählen, so wird f als *Treppenfunktion* bezeichnet.

[41] Henri Léon Lebesgue, 28. Juni 1875 – 26. Juli 1941.

2.7 Bemerkung. Ohne Einschränkung kann man die Mengen A_k, $k = 1, \ldots, n$, als disjunkt annehmen.

2.8 Definition. Eine Abbildung $f\colon I \to X$ heißt *stark messbar* oder *Bochner-messbar*, wenn es eine Folge einfacher Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so gibt, dass $\|f_n(t) - f(t)\|_X \to 0$, $n \to \infty$, für fast alle $t \in I$ gilt.

Für den Fall $X \in \{\mathbb{R}, \bar{\mathbb{R}}, \mathbb{C}\}$ ist der obige Messbarkeitsbegriff zur klassischen (skalaren) Lebesgue-Messbarkeit äquivalent.

2.9 Bemerkung. Da χ_A für jede messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ eine messbare Funktion ist, kann man diese durch Treppenfunktionen approximieren, wobei die Konvergenz dann fast überall vorliegt. Daher kann man Definition 2.8 ohne Einschränkung annehmen, dass f_n, $n \in \mathbb{N}$, Treppenfunktionen sind.

2.10 Satz (Übung)**.** *Seien $f, g\colon I \to X$, $h\colon I \to \mathbb{C}$ stark messbare Funktionen. Dann gilt:*

(i) *$f + g$ und $f \cdot h$ sind stark messbar als Funktionen von I nach X.*

(ii) *Ist Y ein Banachraum und $k \in C^0(X, Y)$, so ist $k \circ f$ stark messbar als Funktion von I nach Y.*

(iii) *$\|f\|_X$ ist stark messbar mit Werten in $\mathbb{R}$ (und damit Lebesgue-messbar).*

(iv) *Ist X ein abgeschlossener Unterraum eines Banachraums Y und f stark messbar als Funktion von I nach Y, so ist f auch stark messbar als Funktion von I nach X.*

2.11 Definition. Sei $f\colon I \to X$ eine Funktion.

- f heißt *abzählbarwertig*, falls es eine abzählbare Zerlegung $\{A_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ von I so gibt, dass $f|_{A_n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ konstant ist[42].
- f heißt *fast separabelwertig*, falls es eine Nullmenge A_0 so gibt, dass $f(I \backslash A_0)$ separabel ist[43].
- f heißt *schwach messbar*, falls $x'f$ Lebesgue-messbar für alle $x' \in X'$ ist.

[42] Offensichtlich ist f genau dann stark messbar, wenn alle A_n, $n \in \mathbb{N}$, messbar sind.
[43] Dies ist dazu äquivalent, dass $f(I \backslash A_0)$ in einem separablen abgeschlossenen Unterraum von X liegt.

2.12 Satz (Pettis[44], ohne Beweis)**.** *Eine Funktion $f\colon I \to X$ ist genau dann stark messbar, wenn sie schwach messbar und fast separabelwertig ist.*

2.13 Korollar. *Sei $f\colon I \to X$. Dann gilt:*

(i) *Die Funktion f ist genau dann stark messbar, falls sie sich fast überall als – punktweisen oder gleichmäßigen – Grenzwert einer Folge stark messbarer, abzählbarwertiger Funktionen schreiben lässt.*

(ii) *Ist X separabel, dann ist f genau dann stark messbar, wenn sie schwach messbar ist.*

(iii) *Ist f stetig, so ist f stark messbar.*

(iv) *Wenn f fast separabelwertig ist und es ein $W \subset X'$ so gibt, dass zu jedem $x \in X\backslash\{0\}$ ein $x' \in W$ mit $x'x \neq 0$ existiert, und für alle $x' \in W$ die Funktion $x' \circ f$ messbar ist, dann ist f stark messbar.*

2.14 Definition. Eine stark messbare Funktion $f\colon I \to X$ heißt *Bochner*[45]*-integrierbar*, falls es eine Folge einfacher Funktionen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so gibt, dass $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast überall in I gegen f für $n \to \infty$ konvergiert und $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I \|f(t)-g_n(t)\|_X \mathrm{d}t = 0$ gilt. Ist f Bochner-integrierbar, so definiert man das *Bochner-Integral von f über I* mittels

$$\int_I f(t)\mathrm{d}t := \lim_{n\to\infty} \int_I g_n(t)\mathrm{d}t,$$

wobei wir

$$\int_I g(t)\mathrm{d}t := \sum_{k=1}^n x_k \lambda(A_k) \text{ für eine einfache Funktion } g = \sum_{k=1}^n x_k \chi_{A_k} \text{ setzen.}$$

2.15 Satz. *Es folgt:*

(i) *Der Wert des Bochner-Integrals hängt nicht von der Wahl der Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ab.*

(ii) *Es gilt $\int_I f(t)\mathrm{d}t \in \operatorname{span}\Big(\operatorname{cl}\big(f(I), \|\cdot\|_X\big)\Big)$ für alle Bochner-integrierbare $f\colon I \to X$. Gilt $\lambda(I) < \infty$, so folgt sogar $\int_I f(t)\mathrm{d}t \in \lambda(I) \operatorname{conv}\Big(\operatorname{cl}\big(f(I), \|\cdot\|_X\big)\Big)$.*

(iii) *Die Menge der Bochner-integrierbaren Funktionen ist ein Vektorraum und das Bochner-Integral ist ein linearer Operator auf diesem Raum mit Werten in X.*

[44] Billy James Pettis, 1913 – 14. April 1979.
[45] Salomon Bochner, 20. August 1899 – 2. Mai 1982.

Folgendes Resultat ist zentral für Bochner-integrierbare Funktionen.

2.16 Satz (Bochner, ohne Beweis). *Eine Funktion $f\colon I \to X$ ist genau dann Bochner-integrierbar, falls die Funktion f stark messbar ist und die Abbildung $\|f\|_X$ Lebesgue-integrierbar ist. Ist f Bochner-integrierbar, dann gilt*

$$\Big\| \int_I f(t)\mathrm{d}t \Big\|_X \leq \int_I \|f(t)\|_X \mathrm{d}t.$$

2.17 Satz (Vertauschbarkeit mit beschränkten, linearen Operatoren). *Seien X, Y Banachräume und sei $T \in L(X,Y)$. Ist $f\colon I \to X$ Bochner-integrierbar, so ist auch $T \circ f$ Bochner-integrierbar und es gilt $T\int_I f(t)\mathrm{d}t = \int_I Tf(t)\mathrm{d}t$.*

2.18 Satz (Vertauschbarkeit mit abgeschlossenen, linearen Operatoren). *Der lineare Operator $A\colon D(A) \subset X \to X$ sei abgeschlossen und sei $f\colon I \to X$ Bochner-integrierbar. Es gelte $f(t) \in D(A)$ für alle $t \in I$ und $A \circ f\colon I \to X$ sei Bochner-integrierbar. Dann gilt $\int_I f(t)\mathrm{d}t \in D(A)$ und*

$$A \int_I f(t)\mathrm{d}t = \int_I Af(t)\mathrm{d}t.$$

2.19 Satz (Dominierte Konvergenz). *Seien $f_n\colon I \to X$, $n \in \mathbb{N}$, stark messbar. Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast überall gegen eine Funktion f und existiert eine (skalare) integrierbare Funktion $g\colon I \to \mathbb{R}$ mit $\|f_n(t)\|_X \leq g(t)$ für fast alle $t \in I$ und alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist f Bochner-integrierbar und es gilt $\int_I f(t)\mathrm{d}t = \lim\limits_{n\to\infty} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t$. Außerdem gilt $\int_I \|f(t) - f_n(t)\|_X \mathrm{d}t \to 0$ für $n \to \infty$.*

2.20 Satz (Fubini[46]). *Sei $I = I_1 \times \cdots \times I_d \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, ein Quader und sei $f\colon I \to X$ stark messbar mit*

$$\int_{I_1} \cdots \int_{I_d} \|f(t_1, \ldots, t_d)\|_X \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_n < \infty.$$

Dann ist f Bochner-integrierbar, die iterierten Integrale

$$\int_{I_{i_1}} \cdots \int_{I_{i_d}} f(t_1, \ldots, t_d)\mathrm{d}t_{i_1} \ldots \mathrm{d}t_{i_d}$$

existieren für alle Permutationen $(i_1, \ldots, i_d)$ von $\{1, \ldots, d\}$, stimmen miteinander überein und sind gleich dem Integral $\int_I f(t)\mathrm{d}t$.

[46] Guido Fubini, 19. Januar 1879 – 6. Juni 1943.

2.21 Definition (Lebesguesche L^p-Räume)**.** Sei $p \in [1, \infty)$. Mit $L^p(I, X)$ bezeichnen wir die Faktorisierung der Menge

$$\big\{f\colon I \to X \mid f \text{ stark messbar}, \|f\|_X^p \text{ integrierbar}\big\}$$

bzgl. der Gleichheitsrelation fast überall in I. Ferner sei für jeden Repräsentanten f einer Klasse aus $L^p(I, X)$

$$\|f\|_{L^p(I,X)} := \Big(\int_I \|f(t)\|_X^p \mathrm{d}t\Big)^{1/p}.$$

Analog zum skalarwertigen Fall wird $L^\infty(I, X)$ als Faktorisierung von

$$\big\{f\colon I \to X \mid f \text{ stark messbar}, \|f\|_X \text{ essentiell beschränkt}\big\}$$

versehen mit der Norm

$$\|f\|_{L^\infty(I,X)} := \operatorname*{ess\,sup}_{t \in I} \|f(t)\|_X$$

definiert. Außerdem setzen wir zu $p \in [1, \infty]$

$$L^p_{\mathrm{loc}}(I, X) := \{f\colon I \to X \mid f|_K \in L^p(K, X) \text{ für alle Quader } K \Subset I\}.$$

Ist I ein Intervall, so schreiben wir

$$L^p(a, b; X) \text{ oder } L^p_{\mathrm{loc}}(a, b; X).$$

2.22 Definition (Testfunktionen)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und sei $f\colon \Omega \to X$. Wir definieren den *Träger* von f vermöge

$$\mathrm{supp}(f) := \mathrm{cl}\big(f^{-1}(X \backslash \{0_X\}), \|\cdot\|_{\mathbb{R}^d}\big).$$

Dann heißt

$$C_0^\infty(\Omega, X) := \{f \in C^\infty(\Omega, X) \mid \mathrm{supp}(f) \text{ kompakt}\}$$

die *Menge der Testfunktionen*.

2.23 Satz (Dichtheit)**.** *Es gilt:*

(i) *Für $p \in [1, \infty]$ ist $L^p(I, X)$ ein Banachraum.*

(ii) *Für $p \in [1, \infty)$ ist $L^p(I, X) = \mathrm{cl}\big(C_0^\infty(I, X), \|\cdot\|_{L^p(I,X)}\big)$.*

2.24 Lemma (du Bois-Reymond[47]). *Sei $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I, X)$ und es gelte*

$$\int_I f(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = 0_X \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}).$$

Dann gilt $f \equiv 0_X$ fast überall in I.

2.25 Definition (Schwache Ableitung). Sei $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I, X)$ und sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Die Funktion f heißt *schwach differenzierbar der Ordnung* α, wenn es ein $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(I, X)$ so gibt, dass

$$\int_I \partial^\alpha \varphi(t) f(t)\mathrm{d}t = (-1)^{|\alpha|} \int_I \varphi(t) g(t)\mathrm{d}t$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R})$ gilt – falls X ein Banachraum über $\mathbb{R}$ ist. Für Banachräume über $\mathbb{C}$ wählt man entsprechend $\varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{C})$ und passt das Produkt durch komplexe Konjugation des zweiten Faktors im Integral an.

Wie im Skalaren sind schwache Ableitungen eindeutig. Ist X separabel, so ist auch $L^p(I, X)$ separabel für $p \in [1, \infty)$.

2.26 Definition (Sobolev[48]-Räume). Seien $k \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty]$ und sei I ein offener Quader. Wir definieren den *(schwachen) Sobolevraum*

$$W^{k,p}(I, X) := \{f \in L^p(I, X) \,|\, \partial^\alpha f \in L^p(I, X) \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0^d \text{ mit } |\alpha| \leq k\}$$

versehen mit der Norm

$$\|\cdot\|_{W^{k,p}(I,X)} := \Big(\sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha \cdot\|^p_{L^p(I,X)}\Big)^{1/p} \text{ für } p \in [1, \infty),$$
$$\|\cdot\|_{W^{k,\infty}(I,X)} := \max_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha \cdot\|_{L^\infty(I,X)}.$$

Analog definieren wir

$$W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(I, X) := \{f \in L^p_{\mathrm{loc}}(I, X) \,|\, \partial^\alpha f \in L^p_{\mathrm{loc}}(I, X) \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0^d \text{ mit } |\alpha| \leq k\}.$$

Ist $I = (a, b)$, so schreiben wir

$$W^{k,p}(a, b; X) \text{ oder } W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(a, b; X).$$

Wie im skalaren Fall ist $W^{k,p}(I, X)$ für $k \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty]$ ein Banachraum.

2.27 Satz. *Sei nun $I := (t_0, T) \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall.*

[47] Emil Heinrich du Bois-Reymond, 7. November 1818 – 26. Dezember 1896.
[48] Sergei Lvovich Sobolev, 6. Oktober 1908 – 3. Januar 1989.

- *Ist f Bochner-integrierbar, so gilt:*
$$f(t) = \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s)\mathrm{d}s \text{ für fast alle } t \in (t_0, T),$$
$$\lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h} \int_t^{t+h} \|f(s) - f(t)\|_X \mathrm{d}s = 0 \text{ für fast alle } t \in (t_0, T).$$
- *Existiert $f' \in L^p_{\mathrm{loc}}(I, X)$ für ein $p \in [1, \infty]$ mit $f' \equiv 0$ fast überall in I, so ist f fast überall konstant.*
- *Es gilt $f \in W^{1,p}(I, X)$ genau dann, wenn es ein $x \in X$ und ein $g = f' \in L^p(I, X)$ so gibt, dass*
$$f(t) = x + \int_{t_0}^t g(s)\mathrm{d}s \text{ für fast alle } t \in I \text{ gilt.}$$
Dann ist f fast überall (Frechét)-differenzierbar und die punktweise Ableitung stimmt mit der schwachen Ableitung überein.

2.28 Satz (Dichtheit)**.** *Seien $k \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty)$ und sei I ein offener Quader. Dann gilt*[49]
$$W^{k,p}(I, X) = \mathrm{cl}\big(C^\infty(\bar{I}, X) \cap W^{k,p}(I, X), \|\cdot\|_{W^{k,p}(I,X)}\big).$$

2.29 Satz (Sobolevscher Einbettungssatz, Übung)**.** *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Für $p \in [1, \infty]$ gilt die stetige Einbettung*
$$W^{1,p}(I, X) \hookrightarrow C^0_b(\bar{I}, X).$$

2.2. Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

2.2.1. Lineare Cauchyprobleme für beschränkte Operatoren

Im Folgenden sei X ein Banachraum und $I := (t_0, T) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall (möglicherweise unbeschränkt). Wir benötigen einen Existenzsatz für die lineare Evolutionsgleichung
$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + f(t) \text{ für } t \in I, \quad y(t_0) = y_0 \in X. \tag{2.2}$$
Im Gegensatz zur klassischen Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen möchten wir die Stetigkeitsvoraussetzungen an A und f durch eine Integrierbarkeitsbedingung ersetzen.

[49] Der Raum $\mathrm{cl}\big(C^\infty(\bar{I}, X) \cap W^{k,p}(I, X), \|\cdot\|_{W^{k,p}(I,X)}\big)$ wird manchmal, vor allem in früheren Arbeiten, auch „starker Sobolevraum" genannt und mit $H^{k,p}(I, X)$ bezeichnet. Dieser Begriff ist heute weniger gebräuchlich und die Bezeichnung $H^{k,p}(I, X)$ wird üblicherweise für Bessel-Potential-Räume verwendet.

2.30 Definition. Sei $p \in [1, \infty)$. Eine Funktion $y \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(0, T; X)$ heißt *starke Lösung*[50] von (2.2), wenn y der Differentialgleichung im distributionellen Sinne genügt, d.h.

$$-\int_{t_0}^{T} y(t)\dot{\varphi}(t)\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{T} (A(t)y(t) + f(t))\varphi(t)\mathrm{d}t$$

für alle Testfunktionen $\varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R})$ gilt, und die Anfangsbedingung im Sinne der Einbettung $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(t_0, t_0 + \varepsilon; X) \hookrightarrow C_b^0([t_0, t_0 + \varepsilon], X)$ erfüllt ist.

2.31 Satz (Existenz und Eindeutigkeit)**.** *Sei $p \in [1, \infty)$. Ferner seien $y_0 \in X$, $A \in L^p_{\mathrm{loc}}(I, L(X))$ und $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(I, X)$. Dann existiert eine eindeutige starke Lösung $y \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(I, X)$ zu (2.2). Zudem existiert zu jedem $T \in I$ ein $C_T > 0$ so, dass*

$$\|y\|_{W^{1,p}(t_0,T;X)} \le C_T\big(\|y_0\|_X + \|f\|_{L^p(t_0,T;X)}\big)$$

für alle $y_0 \in X$ und $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(I, X)$ gilt.

Beweis. **Eindeutigkeit:** Für $y \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(I, X)$ integriert man Gleichung (2.2) bzgl. $t \in I$ und findet

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t} A(s)y(s)\mathrm{d}s. \tag{2.3}$$

Wegen der Inklusion $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(I, X) \subset C^0(\bar{I}, X)$, ist $y \in C^0(\bar{I}, X)$ und $A(\cdot)y(\cdot) \in L^p_{\mathrm{loc}}(I, X)$. Damit ist die obige Identität in ganz $\bar{I}$ gültig. Sind $y, \widetilde{y}$ zwei Lösungen zu (2.2), so ergibt sich unter Verwendung der Integralform der Gronwall[51]schen Ungleichung auf (2.3) die Abschätzung

$$\|y(t) - \widetilde{y}(t)\|_X \le 0 \text{ für alle } t \in \bar{I},$$

woraus sich $y \equiv \widetilde{y}$ ergibt.

Existenz: Ohne Einschränkung sei $T < \infty$.

Wir wählen zwei Folgen $A_n \in C^0([t_0, T], L(X))$ sowie $f_n \in C^0([t_0, T], X)$ so, dass $\|A_n - A\|_{L^p(t_0,T;L(X))} \to 0$ und $\|f_n - f\|_{L^p(t_0,T;L(X))}$ für $n \to \infty$. Dies ist nach Satz 2.23 möglich.

Zu jedem festen $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir das Problem

$$\dot{y}_n(t) = A_n(t)y_n(t) + f_n(t) \text{ für } t \in (t_0, T), \quad y_n(t_0) = y_0, \tag{2.4}$$

welches nach Satz von Picard[52] & Lindelöf[53] durch eine Funktion $y_n \in C^1([t_0, T], X) \subset W^{1,p}(t_0, T; X)$ eindeutig lösbar ist, da die Abbildung

$$F_n \colon [t_0, T] \times X \to X, \quad (t, y) \mapsto A_n(t)y + f_n(t)$$

[50] Dieser Begriff soll nicht mit dem der „klassischen Lösung", d.h. $y \in C^1([t_0, T), X)$, verwechselt werden.

[51] Thomas Hakon Gronwall, 16. Januar 1877 – 9. Mai 1932.

[52] Charles Émile Picard, 24. Juli 1856 – 11. Dezember 1941.

[53] Ernst Leonard Lindelöf, 7. März 1870 – 4. Juni 1946.

stetig in beiden Variablen und Lipschitz[54]-stetig in der zweiten Variable gleichmäßig bzgl. der ersten Variable ist.

Die Integralform von (2.4) lautet

$$y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f_n(s)\mathrm{d}s + \int_{t_0}^t A_n(s)y_n(s)\mathrm{d}s.$$

Es folgt direkt, dass $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^0(\bar{I}, X) \subset L^\infty(I, X)$ durch ein $M > 0$ beschränkt ist, denn: Unter Benutzung der Hölder[55]schen Ungleichung

$$\|y_n(t)\|_X \leq \|y_0\|_X + (T-t_0)^{1/p'}\|f_n\|_{L^p(I,X)} + \int_{t_0}^t \|A_n(s)\|_{L(X)}\|y_n(s)\|_X\mathrm{d}s$$

folgt mit dem Gronwallschen Lemma unter erneuter Anwendung der Hölderschen Ungleichung

$$\|y_n(t)\|_X \leq \big(\|y_0\|_X + (T-t_0)^{1/p'}\|f_n\|_{L^p(I,X)}\big)\exp\big((T-t_0)^{1/p'}\|A_n(s)\|_{L^p(I,L(X))}\big), \tag{2.5}$$

wobei $p' \in (1,\infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Ferner ergibt sich mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
\|y_n(t) - y_m(t)\|_X &\leq \int_{t_0}^t \|f_n(s) - f_m(s)\|_X\mathrm{d}s + \int_{t_0}^t \|A_n(s)y_n(s) - A_m(s)y_m(s)\|_X\mathrm{d}s \\
&\leq \int_{t_0}^t \|f_n(s) - f_m(s)\|_X\mathrm{d}s + \int_{t_0}^t \|A_n(s)y_n(s) - A_n(s)y_m(s)\|_X\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_{t_0}^t \|A_n(s) - A_m(s)\|_{L(X)}\|y_m(s)\|_X\mathrm{d}s \\
&\leq (T-t_0)^{1/p'}\|f_n - f_m\|_{L^p(I,X)} \\
&\quad + \int_{t_0}^t \|A_n(s)\|_{L(X)}\|y_n(s) - y_m(s)\|_X\mathrm{d}s \\
&\quad + M(T-t_0)^{1/p'}\|A_n - A_m\|_{L^p(I,L(X))}
\end{aligned}$$

für alle $t \in \overline{I}$. Dann folgt mit Gronwall für $n, m \geq n_0$

$$\begin{aligned}
\|y_n(t) - y_m(t)\|_X \leq{}& \exp\big((T-t_0)^{1/p'}\|A_n\|_{L^p(I,X)}\big) \\
&\times\big((T-t_0)^{1/p'}\|f_n - f_m\|_{L^p(I,X)} + M(T-t_0)^{1/p'}\|A_n - A_m\|_{L^p(I,L(X))}\big),
\end{aligned}$$

wobei der erste Faktor gegen 0 konvergiert und der zweite Faktor gleichmäßig beschränkt ist. Deshalb ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $C^0(\bar{I}, X)$ und daher gegen ein $y \in C^0(\bar{I}, X)$ konvergent. Ferner gilt

$$\|\dot{y}_n - \dot{y}_m\|_{L^p(I,X)} \leq \|A_n y_n - A_m y_m\|_{L^p(I,X)} + \|f_n - f_m\|_{L^p(I,X)}$$

[54] Rudolf Otto Sigismund Lipschitz, 14. Mai 1832 – 7. Oktober 1903.
[55] Otto Ludwig Hölder, 22. Dezember 1859 – 29. August 1937.

$$\begin{aligned}&\leq \|A_n\|_{L^p(I,L(X))}\|y_n - y_m\|_{L^\infty(I,X)} + M\|A_n - A_m\|_{L^p(I,L(X))} \\ &\quad + \|f_n - f_m\|_{L^p(I,X)} \to 0 \text{ für } n, m \to \infty.\end{aligned}$$

Also ist $(\dot{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^p(I, X)$ und deshalb gegen ein $z \in L^p(I, X)$ konvergent. Dieses ist die schwache Ableitung von y, denn für alle $\varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R})$ gilt

$$-\int_{t_0}^T y(t)\dot{\varphi}(t)\mathrm{d}t \leftarrow -\int_{t_0}^T y_n(t)\dot{\varphi}(t)\mathrm{d}t = \int_{t_0}^T \dot{y}_n(t)\varphi(t)\mathrm{d}t \to \int_{t_0}^T z(t)\varphi(t)\mathrm{d}t$$

für $n \to \infty$. Folglich ist $y \in W^{1,p}(I, X)$.

Wegen $y \in C^0(\bar{I}, X)$ ist $A(\cdot)y + f \in L^p(I, X)$. Überdies löst y Gleichung (2.2), denn:

$$\begin{aligned}-\int_{t_0}^T y(t)\dot{\varphi}(t)\mathrm{d}t \leftarrow -\int_{t_0}^T y_n(t)\dot{\varphi}(t)\mathrm{d}t &= \int_{t_0}^T \dot{y}_n(t)\varphi(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{t_0}^T (A_n(t)y_n(t) + f_n(t))\varphi(t)\mathrm{d}t \to \int_{t_0}^T (A(t)y(t) + f(t))\varphi(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R})$ und $n \to \infty$. Auch die Anfangsbedingung ist erfüllt, denn:

$$\begin{aligned}\|y(t_0) - y_0\|_X &= \|y(t_0) - y_n(t_0) + y_n(t_0) - y_0\|_X \leq \|y(t_0) - y_n(t_0)\|_X \\ &\leq \|y - y_n\|_{C_b^0(\bar{I},X)} \leq C\|y - y_n\|_{W^{1,p}(I,X)} \to 0 \text{ für } n \to \infty.\end{aligned}$$

Dies beendet den Beweis.

Stetige Abhängigkeit von den Daten: Sei $T \in I$ fest. Mit Gleichung (2.5) folgt für $n \to \infty$

$$\|y\|_{L^\infty(t_0,T;X)} \leq C_{1,T}\|y_0\|_X + C_{2,T}\|f_n\|_{L^p(I,X)}$$

mit

$$C_{1,T} := \exp\big((T - t_0)^{1/p'}\|A_n(s)\|_{L^p(I,L(X))}\big), \quad C_{2,T} := C_{1,T}(T - t_0)^{1/p'}.$$

Ferner ergibt sich mit der Hölderschen Ungleichung aus (2.2)

$$\begin{aligned}\|\dot{y}\|_{L^p(t_0,T;X)} &\leq \|A\|_{L^p(t_0,T;X)}\|y\|_{L^{p'}(t_0,T;X)} + \|f\|_{L^p(t_0,T;X)} \\ &\leq C_{3,T}\|y\|_{L^\infty(t_0,T;X)} + \|f\|_{L^p(t_0,T;X)}\end{aligned}$$

mit $C_{3,T} := \|A\|_{L^p(t_0,T;X)}(T - t_0)^{1/p'}$. Wendet man die Höldersche Ungleichung erneut an, so folgt insgesamt

$$\|y\|_{W^{1,p}(t_0,T;X)} \leq C_T\big(\|y_0\|_X + \|f\|_{L^p(t_0,T;X)}\big)$$

für ein $C_T > 0$, welches nur von t_0, T, A und p abhängt. □

Als Korollar haben wir:

2.32 Definition und Satz. *Zu* $A \in L^p_{\mathrm{loc}}(I, L(X)) \hookrightarrow L^p_{\mathrm{loc}}(I, L(L(X)))$ *existiert eine Operatorfamilie* $(S(t))_{t\in\bar{I}} \subset L(X)$ *mit* $S \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(I, L(X))$ *so, dass* S *die eindeutige Lösung des Cauchyproblems*

$$\dot{S}(t) = A(t)S(t) \text{ für fast alle } t \in I, \quad S(t_0) = \mathrm{id}_X \tag{2.6}$$

darstellt. Diese Familie nennt man Fundamentallösung *oder* Evolutionsoperator. *Um die Abhängigkeit von* A *anzudeuten, schreibt man auch* S_A.

2.33 Definition (Adjungierter Operator)**.** Seien X, Y Banachräume und sei $A \in L(X, Y)$.

(i) Der Operator $A' \in L(Y', X')$ definiert durch

$$(A'y')(x) := y'(Ax) \text{ für alle } x \in X, y' \in Y'$$

heißt der *Banachraum-adjungierte Operator* zu A.

(ii) Sind X und Y sogar Hilberträume, so heißt der Operator $A^* \in L(Y, X)$ definiert durch

$$\langle Ax, y\rangle_Y = \langle x, A^*y\rangle_X \text{ für alle } x \in X, y \in Y$$

der *Hilbertraum-adjungierte Operator* zu A.

Aus der Funktionalanalysis wissen wir, dass A' und A^* wohldefiniert sind.

Für Operatorfamilien $(S(t))_{t\in I} \subset L(X, Y)$ verwenden wir die Schreibweisen

$$S'(t) := (S(t))' \text{ bzw. } S^*(t) := (S(t))^* \text{ für } t \in I$$

sowie

$$S^{-1}(t) := (S(t))^{-1} \text{ für } t \in I, \text{ falls } S(t) \text{ invertierbar ist.}$$

2.34 Definition. Für $A \in L^p_{\mathrm{loc}}(I, L(X))$ heißt

$$\dot{z}(t) = -A'(t)z(t) \text{ für alle } t \in I$$

heißt das zu

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) \text{ für alle } t \in I$$

adjungierte Problem.

Die zugehörige Fundamentallösung wird mit $S_{-A'} \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(I, L(X'))$ bezeichnet, welche das zu (2.6) adjungierte Problem zum Anfangswert $\mathrm{id}_{X'}$ löst.

2.35 Satz. *Seien die Voraussetzungen von Satz 2.31 erfüllt und seien* S *bzw.* $S_{-A'}$ *die Fundamentallösung des ursprünglichen bzw. des adjungierten Problems.*

(i) *Der Operator $S(t)$ ist stetig invertierbar für alle $t \in \overline{I}$ und es gilt*

$$S_{-A'}(t) = (S'(t))^{-1}.$$

(ii) *Für die starke Lösung y von (2.2) gilt die Duhamel[56]sche Darstellungsformel:*

$$y(t) = S(t)y_0 + \int_{t_0}^{t} S(t)S^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s \text{ für alle } t \in \overline{I}. \tag{2.7}$$

Beweis. (i) Ohne Einschränkung sei I beschränkt. Wir nehmen an, dass es ein $t \in (t_0, T]$ so gibt, dass $S(t)$ nicht stetig invertierbar ist. Dann existiert ein

$$T_0 := \min\{t \in [t_0, T] \,|\, S(t) \text{ ist nicht stetig invertierbar}\} > t_0.$$

Für $t \in [t_0, T_0)$ gilt dann

$$0 = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(S(t)S^{-1}(t)\big) = \dot{S}(t)S^{-1}(t) + S(t)\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S^{-1}(t),$$

wobei die Ableitungen im schwachen Sinne zu interpretieren sind. Daraus folgt

$$-A(t) = S(t)\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S^{-1}(t) \text{ für alle } t \in [t_0, T_0)$$

und damit

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S^{-1}(t) = -S^{-1}(t)A(t) \text{ für alle } t \in [t_0, T_0)$$

bzw.

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(S'(t))^{-1} = -A'(t)(S'(t))^{-1} \text{ für alle } t \in [t_0, T_0).$$

Daher ist

$$S_{-A'}(t) = (S'(t))^{-1} \text{ für alle } t \in [t_0, T_0).$$

Wegen $S_{-A'} \in C^0(\bar{I}, L(X'))$ folgt die Existenz von

$$(S'(T_0))^{-1} = \lim_{t \nearrow T_0} (S'(t))^{-1} \in L(X'),$$

was einen Widerspruch zur Definition von T_0 darstellt.

(ii) Diese Behauptung lässt sich einfach nachrechnen.

Dies beendet den Beweis. □

2.36 Definition. Sei X ein komplexer Banachraum. Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und sei $f\colon G \to X$. Die Funktion f heißt:

[56]Jean-Marie Constant Duhamel, 5. Februar 1797 – 29. April 1872.

(i) *holomorph (in G)*, wenn sie an jeder Stelle $z_0 \in G$ komplex differenzierbar ist, d.h. wenn der Limes
$$\lim_{\mathbb{C}\ni h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} =: f'(z_0) \text{ existiert.}$$
Man schreibt dann $f \in \mathcal{O}(G, X)$.

(ii) *schwach holomorph (in G)*, wenn die skalare Funktion $x' \circ f \colon G \to \mathbb{C}$ für alle $x' \in X'$ holomorph ist.

2.37 Definition. Seien X ein komplexer Banachraum, $G \subset \mathbb{C}$ offen und Γ eine stückweise glatte Kurveparametrisiert durch ein $\gamma\colon [a,b] \to G$, $a, b \in \mathbb{R}$. Sei $f\colon G \to X$ stetig. Wir definieren das *Kurvenintegral* als
$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z := \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\mathrm{d}t \in X.$$

2.38 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und sei X ein komplexer Banachraum. Ferner sei $f\colon G \to X$ fast separabelwertig. Dann gilt:*

(i) *f ist genau dann holomorph, wenn f schwach holomorph ist.*

(ii) *Ist f holomorph und ist Γ eine stückweise glatte, geschlossene Kurve in G und ist G einfach zusammenhängend, so gelten der Cauchysche Integralsatz*
$$\int_\Gamma f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = 0_X$$
und die Cauchysche Integralformel
$$\operatorname{ind}(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{z-\zeta}\mathrm{d}\zeta \text{ für alle } z \in G\backslash\Gamma.$$
Diese Aussage gilt auch für null-homologe Zyklen.

2.39 Bemerkung. Sei $A \in L(X)$. Dann kann man analog zu Analysis III die *gleichmäßig stetige Halbgruppe*[57]
$$S(t) := e^{tA} := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}t^n \text{ für } t \geq 0$$
definieren. Diese lässt sich zu einer Operatorfamilie $(S(t))_{t\in\mathbb{C}}$ eindeutig fortsetzen, die wir wiederum mit S bezeichnen. Da die Abbildung $\mathbb{C} \ni t \mapsto S(t) \in L(X)$ holomorph ist, d.h. $S \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, L(X))$, wird $(S(t))_{t\in\mathbb{C}}$ manchmal als *holomorphe Gruppe* bezeichnet. Für diese gilt dann:

[57]Später werden wir noch sogenannte „C_0-Halbruppen” definieren.

(i) $S \in W^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, L(X))$ für jedes $p \in [1, \infty]$.

(ii) $S(0) = \mathrm{id}_X$.

(iii) $S(t+s) = S(t)S(s)$ für $t, s \in \mathbb{C}$, insbesondere $S^{-1}(t) = S(-t)$.

(iv) $\dot{S}(t) = AS(t) = S(t)A$ für alle $t \in \mathbb{C}$.

(v) $S(t) = e^{tA}$ für alle $t \in \mathbb{C}$.

Die Duhamelsche Formel (2.7) reduziert sich ferner zu

$$y(t) = S(t - t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} S(t-s)f(s)\mathrm{d}s \text{ für alle } t \in \bar{I}.$$

2.2.2. Steuerbarkeit und Gramscher Steuerbarkeitsoperator

Seien $p, q, \nu \in [1, \infty)$, $r, s \in (1, \infty]$ mit

$$\tfrac{1}{q} + \tfrac{1}{r} = \tfrac{1}{p} \text{ und } \tfrac{1}{q} + \tfrac{1}{s} = \tfrac{1}{\nu}$$

und seien X, U, Y Banachräume. Ferner sei I ein Intervall mit $I = \bar{I}$ und $\min I = t_0$ sowie $A \in L^p_{\mathrm{loc}}(I, L(X))$, $B \in L^r_{\mathrm{loc}}(I, L(U, X))$, $C \in L^\nu_{\mathrm{loc}}(I, L(X, Y))$ und $D \in L^s_{\mathrm{loc}}(I, L(U, Y))$. Wir wählen

$$\mathcal{U} := L^q_{\mathrm{loc}}(I, U) \text{ bzw. } \mathcal{X} := W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(I, X) \text{ bzw. } \mathcal{Y} := L^\nu_{\mathrm{loc}}(I, Y)$$

als Räume der zulässigen Kontrollen (Inputs) bzw. der zulässigen Zustände (States) bzw. der zulässigen Ausgänge (Outputs)[58]. Wir betrachten das Kontrollsystem

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)u(t) \text{ für } t \in I, \quad y(t_0) = x_0 \in X, \tag{2.8}$$
$$w(t) = C(t)y(t) + D(t)u(t) \text{ für } t \in I. \tag{2.9}$$

wobei Gleichung (2.9) *Beobachtungsgleichung* heißt.

Die Lösung von (2.8) zu einem Input $u \in \mathcal{U}$ und einem Anfangswert $x_0 \in X$ sei mit $y^{x_0,u} \in \mathcal{X}$ bezeichnet. Deren eindeutige Existenz wird durch Satz 2.31 gesichert. Man beachte außerdem, dass dann auch $w^{x_0,u} \in \mathcal{Y}$ wegen der Hölderschen Ungleichung gilt, wobei w die zu u und x_0 gehörige Beobachtung bezeichnet.

2.40 Definition. Der Operator

$$\mathcal{L}_T \colon L^q(t_0, T; U) \to X, \quad u \mapsto \int_{t_0}^{T} S(T)S^{-1}(s)B(s)u(s)\mathrm{d}s$$

heißt *Steuerungs-Zustands-Operator*.

[58] Wählt man $C \equiv \mathrm{id}_X$, so kann man die Zustände y mit den Ausgängen w assoziieren, weshalb $\mathcal{X}$ manchmal als „Output-Raum" oder „Raum der zulässigen Ausgänge" bezeichnet wird.

Wegen $\mathcal{L}_T u = y^{0_X,u}(T)$ folgt dann $\mathcal{L}_T \in L(L^q(t_0,T;U),X)$ nach Satz 2.31, da $B \in L^r(t_0,T;L(U,X))$.

2.41 Definition. Sei $T \in I\backslash\{t_0\}$.

(i) Gilt $y^{x_0,u}(T) = x_T$ für $x_0, x_T \in X$, so sagt man, dass die Kontrolle $u \in \mathcal{U}$ das System aus dem Zustand x_0 in den Zustand x_T zum Zeitpunkt T *überführt.* Alternativ sagt man, dass das System von x_0 aus nach x_T zum Zeitpunkt T *(exakt) kontrollierbar* oder *(exakt) steuerbar* ist, sich der Zustand x_0 nach x_T zum Zeitpunkt T *steuern* lässt oder dass der Zustand x_T zur Zeit T von x_0 aus *erreichbar* ist.

(ii) Seien $x_0, x_T \in X$. Gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $u \in \mathcal{U}$ so, dass $y^{x_0,u}(0) = x_0$ und $\|y^{x_0,u}(T) - x_T\|_X < \varepsilon$ gilt, so heißt das System *vom Zustand x_0 aus in den Zustand x_T zum Zeitpunkt T approximativ steuerbar.*

(iii) Das System (2.8) heißt *von $x_0 \in X$ aus zur Zeit T (exakt) steuerbar bzw. approximativ steuerbar*, wenn es für alle $x_T \in X$ von x_0 aus nach x_T steuerbar bzw. approximativ steuerbar ist.

(iv) Das System (2.8) heißt zum *Zeitpunkt T (exakt) steuerbar bzw. approximativ steuerbar*, wenn es für alle $x_0, x_T \in X$ von x_0 aus nach x_T zur Zeit T steuerbar bzw. approximativ steuerbar ist.

(v) Das System (2.8) heißt *(vollständig exakt) steuerbar bzw. (vollständig) approximativ steuerbar*, wenn es für alle $T \in I\backslash\{t_0\}$ zum Zeitpunkt T steuerbar bzw. approximativ steuerbar ist.

(vi) Ersetzt man x_T durch 0_X, so spricht man von der *Null-Steuerbarkeit zum Zeitpunkt T von $x_0 \in X$ aus* bzw. *Null-Steuerbarkeit zum Zeitpunkt T* bzw. *Null-Steuerbarkeit* des Systems.

Nach Gleichung (2.7) ist ein Zustand x_T von x_0 aus genau dann zum Zeitpunkt $T \in I\backslash\{t_0\}$ erreichbar, wenn es ein $u \in \mathcal{U}$ derart gibt, dass

$$\int_{t_0}^{T} S(T)S^{-1}(s)B(s)u(s)\mathrm{d}s = x_T - S(T)x_0 \tag{2.10}$$

gilt.

2.42 Satz. *Es gilt:*

(i) *Das System (2.8) ist genau dann von $x_0 \in X$ nach $x_T \in X$ zur Zeit $T \in I\backslash\{t_0\}$ steuerbar, wenn $x_T - S(T)x_0 \in \mathrm{im}(\mathcal{L}_T)$ gilt.*

(ii) *Das System (2.8) ist genau dann zur Zeit* $T \in I \backslash \{t_0\}$ *exakt steuerbar, wenn* $\operatorname{im}(\mathcal{L}_T) = X$ *gilt.*

(iii) *Das System (2.8) ist genau dann zur Zeit* $T \in I \backslash \{t_0\}$ *approximativ steuerbar, wenn* $\operatorname{cl}(\operatorname{im}(\mathcal{L}_T), \|\cdot\|_X) = X$ *gilt.*

(iv) *Das System (2.8) ist genau dann zur Zeit* $T \in I \backslash \{t_0\}$ *Null-steuerbar, wenn die Inklusion* $\operatorname{im}(S(T)) \subset \operatorname{im}(\mathcal{L}_T)$ *gilt.*

Beweis. (i) Die Behauptung folgt direkt mit (2.10).

(ii) Um (ii) zu beweisen, nehmen wir zunächst an, dass $\mathcal{L}_T$ surjektiv ist. Seien $x_0, x_T \in X$. Dann gibt es ein $u \in \mathcal{L}_T^{-1}\big(\{x_T - S(T)x_0\}\big)$. Umgekehrt, da $S(T)$ ein linearer Homöomorphismus ist, gilt

$$\{x_T - S(T)x_0 \,|\, x_0, x_T \in X\} = X$$

und damit nach (i) $\operatorname{im}(\mathcal{L}_T) \supset X$, d.h. $\mathcal{L}_T$ ist surjektiv.

(iii) Wir nehmen zunächst an, dass das System zur Zeit T approximativ steuerbar ist, und beweisen, dass $\operatorname{im}(\mathcal{L}_T)$ dicht in X liegt. Sei $x_T \in X$ beliebig. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $u \in \mathcal{U}$ so, dass

$$\|\mathcal{L}_T u - x_T\|_X = \|y^{0_X,u}(T) - x_T\|_X < \varepsilon \text{ gilt,} \tag{2.11}$$

was die Dichtheit von $\operatorname{im}(\mathcal{L}_T)$ bedeutet.

Gelte nun umgekehrt $\operatorname{cl}(\operatorname{im}(\mathcal{L}_T), \|\cdot\|_X) = X$. Seien $x_0, x_T \in X$ und sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $u \in \mathcal{U}$ so, dass wegen (2.10)

$$\|y^{x_0,u}(T) - x_T\|_X = \|\mathcal{L}_T u - \widetilde{x}_T\|_X < \varepsilon$$

mit $\widetilde{x}_T := x_T - S(T)x_0$ gilt.

(iv) Sei zunächst angenommen, dass das System zum Zeitpunkt T Null-steuerbar ist. Dann gibt es zu jedem $x_0 \in X$ ein $u \in \mathcal{U}$ so, dass

$$S(T)x_0 + \mathcal{L}_T u = y^{x_0,u}(T) = 0_X \tag{2.12}$$

gilt, woraus sich unmittelbar

$$\mathcal{L}_T u = -S(T)x_0$$

und damit $\operatorname{im}(S(T)) \subset \operatorname{im}(\mathcal{L}_T)$ ergibt.

Gelte nun umgekehrt $\operatorname{im}(S(T)) \subset \operatorname{im}(\mathcal{L}_T)$. Dann gibt es zu jedem $x_0 \in X$ ein $u \in \mathcal{U}$ so, dass $S(T)x_0 = \mathcal{L}_T(-u) = -\mathcal{L}_T(u)$ gilt. Nach (2.10) gilt dann $y^{x_0,u}(T) = 0_X$.

Dies beendet den Beweis. $\square$

2.43 Bemerkung. (i) Da hier sowohl A als auch B als Familien beschränkter Operatoren angenommen wurden, folgt mit Satz 2.35, dass $S(t)$ für alle $t \in \bar{I}$ stetig invertierbar ist. Daher gilt $\operatorname{im}(S(T)) = X$, wonach die Begriffe der exakten und approximativen Steuerbarkeit sowie der Null-Steuerbarkeit äquivalent sind. Sind A und B unbeschränkt, was bei Systemen mit „distributed parameters", zu denen auch PDGL zählen, der Fall ist, so liegt eine solche Äquivalenz im Allgemeinen nicht vor. Man kann dabei z.B. an die Wärmeleitungsgleichung denken: Unter entsprechenden Voraussetzung folgt für $x_0 \in L^2(\Omega)$ bereits $S(T)x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} W^{k,2}(\Omega) \subsetneq L^2(\Omega)$.

(ii) Im Endlichdimensionalen gelten die Implikationen:

$$\begin{aligned}&\text{Exakte Steuerbarkeit (zur Zeit } T \in I\backslash\{t_0\}) \Rightarrow \\ &\text{Null-Steuerbarkeit (zur Zeit } T \in I\backslash\{t_0\}) \Rightarrow \\ &\text{Approximative Steuerbarkeit (zur Zeit } T \in I\backslash\{t_0\}).\end{aligned}$$

(iii) Sind A und B konstant, so ist das System (2.8) genau dann für alle $T \in I\backslash\{t_0\}$ exakt/approximativ/Null-steuerbar, wenn dies für ein $T \in I\backslash\{t_0\}$ gilt.

Obwohl Satz 2.42 ein Kriterium für Steuerbarkeit darstellt, liefert er kein praktisches Instrument, mit welchem man die Abbildung auf (relative) Surjektivität untersuchen kann. Dies ist bei unendlichdimensionalen Problemen umso problematischer, da in der Regel keine Methoden zur expliziten Berechnung der Fundamentallösung $(S(t))_{t\in I}$ zur Verfügung stehen. Um eine zufriedenstellende Antwort geben zu können, müssen die Eigenschaften von $\mathcal{L}_T$ systematisch untersucht werden. Wir beginnen unsere Diskussion mit der Hilbertraumsituation. Die auf diesem Wege gemachten Erkenntnisse werden wir später so weit wie möglich auf den allgemeinen Banachraumfall übertragen.

Seien also bis zum Ende des Abschnittes X, U Hilberträume und es gelte $p = q = 2$.

2.44 Definition. Der lineare Operator $\mathcal{Q}_T \colon X \to X$ mit

$$\mathcal{Q}_T := \int_{t_0}^{T} S(T)S^{-1}(t)B(t)B^*(t)(S^*(t))^{-1}S^*(T)\mathrm{d}t$$

heißt *Gram[59]scher (Steuerbarkeits-)Operator.*

Hierbei ist $B^*(t) \in L(X, U)$ mit

$$\langle B^*(t)x, u\rangle_U = \langle x, B(t)u\rangle_X \text{ für alle } x \in X, u \in U \text{ und fast alle } t \in I.$$

[59] Jørgen Pedersen Gram, 27. Juni 1850 – 29. April 1916.

Offensichtlich ist $\mathcal{Q}_T \in L(X)$ wegen

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{Q}_T x, y \rangle_X &= \Big\langle \Big(\int_{t_0}^T S(T)S^{-1}(t)B(t)B^*(t)(S^*(t))^{-1}S^*(T)\mathrm{d}t \Big) x, y \Big\rangle_X \\ &= \int_{t_0}^T \langle B^*(t)(S^*(t))^{-1}S^*(T)x, B^*(t)(S^*(t))^{-1}S^*(T)y\rangle_U \mathrm{d}t \\ &= \langle x, \mathcal{Q}_T^* y\rangle_X \quad \text{für alle } x, y \in X \end{aligned} \tag{2.13}$$

symmetrisch und daher auch selbstadjungiert und wegen

$$\langle \mathcal{Q}_T x, x\rangle_X = \int_{t_0}^T \|B^*(t)(S^*(t))^{-1}S^*(T)x\|_U^2 \mathrm{d}t \geq 0 \text{ für alle } x \in X \tag{2.14}$$

positiv semidefinit.

2.45 Satz. *Sei $T \in I \backslash \{t_0\}$. Ist jeder Zustand $x_T \in X$ von $x_0 = 0_X$ aus zur Zeit T erreichbar, d.h. $\mathrm{im}(\mathcal{L}_T) = X$, so ist $\mathcal{Q}_T$ invertierbar.*

Beweis. Für $u \in L^2(t_0, T; U)$ und $x \in X$ gilt

$$\langle \mathcal{L}_T u, x\rangle_X = \int_{t_0}^T \langle u(t), B^*(t)(S^*(t))^{-1}S^*(T)x\rangle_U \mathrm{d}t, \tag{2.15}$$

woraus sich $\mathcal{L}_T^* x = B^*(\cdot)(S^*(\cdot))^{-1}S^*(T)x$ in $L^2(t_0, T; X)$ ergibt. Angenommen, $\mathcal{Q}_T$ wäre nicht invertierbar, dann gäbe es ein $x \in X\backslash\{0_X\}$ mit $\mathcal{Q}_T x = 0_X$. Wegen Gleichung (2.14) würde dann

$$B^*(t)(S^*(t))^{-1}S^*(T)x = 0_X \text{ für fast alle } t \in [t_0, T]$$

gelten. Folglich wäre dann $\ker(\mathcal{L}_T^*) \neq \{0_X\}$. Da wir aus der Funktionalanalysis wissen, dass

$$\mathrm{cl}\big(\mathrm{im}(\mathcal{L}_T), \|\cdot\|_X\big) = (\ker(\mathcal{L}_T^*))^\perp$$

gilt, folgt $\mathrm{im}(\mathcal{L}_T) \subsetneq X$, was einen Widerspruch zur Voraussetzung darstellt. □

Mit dieser Beobachtung können wir folgendes Steuerbarkeitskriterium beweisen.

2.46 Satz. *Das System (2.8) ist genau dann zur Zeit $T \in I\backslash\{t_0\}$ exakt steuerbar, wenn $\mathcal{Q}_T$ stetig invertierbar ist. In diesem Fall handelt es sich bei $\hat{u} \in L^2(t_0, T; U)$ mit*

$$\hat{u}(t) := -B^*(t)(S^*(t))^{-1}S^*(T)\mathcal{Q}_T^{-1}(S(T)x_0 - x_T) \textit{ für } t \in [t_0, T] \tag{2.16}$$

um eine zulässige Kontrolle, die das System von $x_0 \in X$ aus nach $x_T \in X$ überführt.

Ferner gilt

$$\|\hat{u}\|_{L^2(t_0,T;U)} = \min\{\|u\|_{L^2(t_0,T;U)} \,|\, u \in L^2(t_0,T;U), y^{x_0,u}(T) = x_T\}$$

sowie

$$\int_{t_0}^T \|\hat{u}(t)\|_U^2 \mathrm{d}t = \langle \mathcal{Q}_T^{-1}(S(T)x_0 - x_T), S(T)S^{-1}(t_0)x_0 - x_T\rangle_X.$$

Beweis. Mit Definition und Satz 2.32 und Satz 2.31 folgt $\hat{u} \in L^\infty(t_0,T;U) \subset L^2(t_0,T;U)$, $y^{x_0,\hat{u}} \in W^{1,2}(t_0,T;X)$ sowie

$$\begin{aligned} y^{x_0,\hat{u}}(T) &= S(T)x_0 - \\ &\qquad \Big(\int_{t_0}^T S(T)S^{-1}(t)B(t)B^*(t)(S^*(t))^{-1}S^*(T)\mathrm{d}t\Big)\mathcal{Q}_T^{-1}(S(T)x_0 - x_T) \\ &= S(T)x_0 - \mathcal{Q}_T(\mathcal{Q}_T^{-1}(S(T)x_0 - x_T)) = x_T. \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T \|\hat{u}(t)\|_U^2 \mathrm{d}t &= \int_{t_0}^T \|B^*(t)(S^*(t))^{-1}S^*(T)\mathcal{Q}_T^{-1}(S(T)x_0 - x_T)\|_U^2 \mathrm{d}t \\ &= \Big\langle \int_{t_0}^T S(T)S^{-1}(t)B(t)B^*(t)(S^*(t))^{-1}S^*(T)\mathcal{Q}_T^{-1}(S(T)x_0 - x_T)\mathrm{d}t, \\ &\qquad \mathcal{Q}_T^{-1}(S(T)x_0 - x_T)\Big\rangle_X \\ &= \langle \mathcal{Q}_T\mathcal{Q}_T^{-1}(S(T)x_0 - x_T), \mathcal{Q}_T^{-1}(S(T)x_0 - x_T)\rangle_X \\ &= \langle \mathcal{Q}_T^{-1}(S(T)x_0 - x_T), S(T)x_0 - x_T\rangle_X. \end{aligned}$$

Wir definieren

$$\mathcal{U}_{t_0,x_0,T,x_T} := \{u \in \mathcal{U} \,|\, y^{x_0,u}(T) = x_T\},$$

wählen ein beliebiges $u \in \mathcal{U}_{t_0,x_0,T,x_T}$ und finden

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T \langle u(t), \hat{u}(t)\rangle_U \mathrm{d}t &= -\int_{t_0}^T \langle u(t), B^*(t)(S^*(t))^{-1}S^*(T)\mathcal{Q}_T^{-1}(S(T)x_0 - x_T)\rangle_U \mathrm{d}t \\ &= \Big\langle -\int_{t_0}^T S(T)S^{-1}(t)B(t)u(t)\mathrm{d}t, \mathcal{Q}_T^{-1}(S(T)x_0 - x_T)\Big\rangle_X \\ &= \langle S(T)x_0 - x_T, \mathcal{Q}_T^{-1}(S(T)x_0 - x_T)\rangle_X, \end{aligned}$$

d.h. $\langle u, \hat{u}\rangle_{L^2(t_0,T;U)} = \|\hat{u}\|_{L^2(t_0,T;U)}^2$. Damit folgt

$$\|u\|_{L^2(t_0,T;U)}^2 = \|\hat{u}\|_{L^2(t_0,T;U)}^2 + \|u - \hat{u}\|_{L^2(t_0,T;U)}^2,$$

wobei letzteres Funktional auf $\mathcal{U}_{t_0,x_0,T,x_T}$ sein Minimum in $\hat{u}$ annimmt. □

Sind A, B konstant, d.h. $A \equiv A(t_0)$, $B \equiv B(t_0)$, dann wissen wir, dass $(S(t))_{t\in\mathbb{C}}$ eine holomorphe Gruppe bildet und

$$\mathcal{L}_T u = \int_{t_0}^{T} S(T-t)Bu(t)\mathrm{d}t$$

gilt. Substituiert man $s := T - t$, so folgt

$$\mathcal{Q}_T = \int_0^{T-t_0} S(s)BB^*S^*(s)\mathrm{d}s.$$

2.47 Satz. *Ist $A \in L(X)$ und ist $B \in L(U,X)$ ein Isomorphismus, so ist das System (2.8) vollständig steuerbar.*

Beweis. Da B ein Isomorphismus zwischen U und X ist, ist B^* ein Isomorphismus zwischen X und U. Wegen der Stetigkeit von S^* in t_0 gibt es ein $\tau > 0$ so, dass $\|S^*(t) - \mathrm{id}_X\|_{L(X)} \leq \frac{1}{2}$ für $t \in [t_0, t_0+\tau]$ gilt. Damit folgt für $x \in X$

$$\langle \mathcal{Q}_T x, x\rangle_X = \int_0^{\tau} \|B^*S^*(s)x\|_U^2 \mathrm{d}s \geq \tfrac{\tau}{4}\|(B^*)^{-1}\|_{L(U,X)}^2 \|x\|_X^2,$$

d.h. $\mathcal{Q}_T$ ist invertierbar für ein und damit auch für alle $T \in I\backslash\{t_0\}$ (s. Satz 2.48). □

2.48 Satz. *Seien A, B konstant. Dann ist $\mathcal{Q}_T$ genau dann für alle $T \in I\backslash\{t_0\}$ invertierbar, wenn es für ein $\widetilde{T} \in I\backslash\{t_0\}$ invertierbar ist.*

Beweis. Angenommen, es gäbe ein $T \in I\backslash\{t_0, \widetilde{T}\}$, für welches $\mathcal{Q}_T$ nicht invertierbar wäre. Dann gäbe es ein $x \in \ker(\mathcal{Q}_T)\backslash\{0_X\}$. Die im Beweis von Satz 2.45 eingeführte Funktion $\hat{u}$ ließe sich zu einer holomorphen Funktion

$$\mathbb{C} \ni t \mapsto \hat{u}(t) = B^*S^*(T-t)x$$

fortsetzen, welche nach Gleichung (2.14) auf $[t_0, T]$ und wegen der Holomorphie in ganz $\mathbb{C}$ verschwinden würde. Damit gälte nach Gleichung (2.15) $\ker(\mathcal{L}_{\hat{T}}^*) \neq \{0_X\}$ für alle $\hat{T} \in I$. Insbesondere wäre dann $\mathrm{im}(\mathcal{L}_{\widetilde{T}}) \subsetneq X$, was einen Widerspruch darstellt. □

Zum Abschluss des Abschnittes wollen wir uns mit der endlichdimensionalen Situation beschäftigen. Wir nehmen an, dass $X = \mathbb{R}^n$, $U = \mathbb{R}^m$, $n, m \in \mathbb{N}$, euklidische Räume und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ konstante Matrizen sind. Unser Ziel wird nun sein, die Invertierbarkeit von $\mathcal{Q}_T$ als eine möglichst einfache Bedingung an A und B zu beschreiben. Ein solches Resultat ist durch die sogenannte „Kálmánsche Rangbedingung" gegeben, welche wir im Folgenden formulieren und beweisen werden.

Hierzu benötigen wir ein bekanntes Resultat aus der Linearen Algebra.

2.49 Satz (Cayley[60] & Hamilton[61]). *Sei $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit charakteristischem Polynom*

$$p_M(\lambda) := \det(\lambda\,\mathrm{I}_{n\times n} - M) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n \qquad \text{für } \lambda \in \mathbb{C},$$

wobei $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$M^n + a_1 M^{n-1} + \cdots + a_n \mathrm{I}_{n\times n} = 0_{n\times n}.$$

Wir definieren die Abbildung

$$l_n \colon U^n \simeq \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^n, \quad (u_0, \ldots, u_{n-1}) \mapsto \sum_{j=0}^{n-1} A^j B u_j,$$

wobei wir U^n mit der Produkttopologie versehen.

2.50 Lemma. *Für $T \in I\backslash\{t_0\}$ gilt $\mathrm{im}(\mathcal{L}_T) = \mathrm{im}(l_n)$. Insbesondere ist $\mathcal{L}_T$ genau dann surjektiv, wenn l_n surjektiv ist.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei $t_0 = 0$. Wir benutzen die Identitäten

$$\mathrm{im}(\mathcal{L}_T) = (\ker(\mathcal{L}_T^*))^\perp, \quad \mathrm{im}(l_n) = (\ker(l_n^*))^\perp.$$

„$\subset$" Für $x \in X$ und $u_j \in U$, $j = 0, \ldots, n-1$ ist

$$\langle l_n(u_0, \ldots, u_{n-1}), x\rangle_X = \langle u_0, B^*x\rangle_U + \cdots + \langle u_{n-1}, B^*(A^*)^{n-1}x\rangle_U.$$

Ist $x \in \ker(l_n^*)$, so gilt $\langle l_n(u_0, \ldots, u_{n-1}), x\rangle_X = 0$ für alle $u_0, \ldots, u_{n-1} \in U$ und es folgt

$$B^*x = 0_U, \ldots, B^*(A^*)^{n-1}x = 0_U.$$

Mit dem Satz von Cayley & Hamilton angewendet auf A^* ergeben sich dann $c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$ mit

$$(A^*)^n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (A^*)^k.$$

Induktiv folgt für $l \in \mathbb{N}_0$ die Existenz von $c_{l,0}, \ldots, c_{l,n-1} \in \mathbb{R}$ mit

$$(A^*)^l = \sum_{k=0}^{n-1} c_{l,k} (A^*)^k.$$

Damit gilt

$$B^*(A^*)^k x = 0_U \text{ für } k \in \mathbb{N}_0.$$

[60] Arthur Cayley, 16. August 1821 – 26. Januar 1895.
[61] William Rowan Hamilton, 4. August 1805 – 2. September 1865.

Unter Beachtung der Identität

$$B^*S^*(t)x = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{t^k}{k!} B^*(A^*)^k x \text{ für } t \in \mathbb{C}$$

kann man

$$B^*S^*(t)x = 0_U$$

für alle $t \in \mathbb{C}$ und damit

$$\langle \mathcal{L}_T u, x\rangle_X = \int_0^T \langle u(t), B^*S^*(T-t)x\rangle_U \mathrm{d}t = 0$$

für alle $u \in L^2(0,T;U)$ und $T \in I\backslash\{t_0\}$ folgern, d.h. $x \in \ker(\mathcal{L}_T^*)$.

„$\supset$" Sei $x \in \ker(\mathcal{L}_T^*)$. Dann gilt $\langle \mathcal{L}_T u, x\rangle_X = 0$ für alle $u \in L^2(0,T;U)$ und damit auch $B^*S^*(t)x = 0_U$ für $t \in [0,T]$. Wendet man den Operator $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}$, $k = 0,\ldots,n$, auf die Identität

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{t^k}{k!} B^*(A^*)^k x = 0_U \text{ für } t \in [0,T]$$

an und wertet man das Resultat in $t = 0$ aus, so folgt

$$B^*(A^*)^k x = 0_U \text{ für } k = 0,\ldots,n-1$$

und damit

$$\langle l_n(u_0,\ldots,u_{n-1}), x\rangle_X = 0$$

für alle $u_0,\ldots,u_{n-1} \in U$.

Dies beendet den Beweis. □

Wir definieren die Matrix

$$(A|B) := (B\ AB\ A^2B\ \ldots\ A^{n-1}B) \in \mathbb{R}^{n\times(nm)}$$

2.51 Satz (Kálmán)**.** *Äquivalent sind folgende Bedingungen:*

(i) *Das System (2.8) ist vollständig steuerbar.*

(ii) *Das System (2.8) ist zu einem Zeitpunkt $T \in I\backslash\{t_0\}$ steuerbar.*

(iii) *Die Matrix $\mathcal{Q}_T$ ist für alle $T \in I\backslash\{t_0\}$ invertierbar.*

(iv) *Die Matrix $\mathcal{Q}_T$ ist für ein $T \in I\backslash\{t_0\}$ invertierbar.*

(v) *Es gilt* $\operatorname{rank}(A|B) = n$.

Beweis. Die Äquivalenz von (i)-(iv) folgt mit Sätzen 2.46 und 2.48, während sich die Äquivalenz zwischen (i) und (v) aus Satz 2.42 und Lemma 2.50 ergibt. □

Für unendlich-dimensionale Systeme mit beschränkten Operatoren gilt folgendes Resultat:

2.52 Satz (Triggiani[62]). *Seien X, U Banachräume, $A \in L(X)$, $B \in L(U, X)$ und $p = q = 2$. Das System (2.8) ist genau dann vollständig steuerbar, wenn*

$$\operatorname{cl}\Big(\operatorname{span}\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} \operatorname{im}(A^n B)\Big), \|\cdot\|_X\Big) = X$$

gilt.

Ist die Kálmánsche Rangbedingung aus Satz 2.51 erfüllt, so liefert Gleichung (2.16) für alle $x_0, x_T \in X$ eine Steuerung $\hat{u}$, welche das System (2.8) von x_0 aus nach x_T überführt. Um die Kontrollfunktion explizit angeben zu können, benötigt man die Inverse der Gramschen Steuerbarkeitsmatrix $\mathcal{Q}_T$. Um den Rechenaufwand zu minimieren, kann folgender Ansatz in manchen Situationen nützlich sein.

Gilt $\operatorname{rank}(A|B) = n$, so gibt es eine Rechtsinverse $K \in \mathbb{R}^{(mn)\times n}$ mit $(A|B)K = \mathrm{I}_{n\times n}$ oder in der Blockschreibweise Matrizen $K_1, \dots, K_n \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit

$$BK_1 + \dots + ABK_2 + \dots + A^{n-1}BK_n = \mathrm{I}_{n\times n}.$$

Ferner existiert eine Funktion $\varphi \in C^{n-1}([t_0, T], \mathbb{R})$ mit

$$\int_{t_0}^{T} \varphi(t)\mathrm{d}t = 1 \tag{2.17}$$

sowie

$$\varphi^{(j)}(t_0) = \varphi^{(j)}(T) = 0 \text{ für } j = 0, \dots, n-1. \tag{2.18}$$

2.53 Satz. *Es gelte die Rangbedingung* $\operatorname{rank}(A|B) = n$ *sowie (2.17), (2.18). Dann ist die Steuerung*

$$\widetilde{u}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} K_{j+1}\psi^{(j)}(t) \text{ für } t \in [t_0, T]$$

mit

$$\psi(t) := S(t-T)(x_T - S(T-t_0)x_0)\varphi(t) \text{ für } t \in [t_0, T]$$

ein Element von $L^2(t_0, T; U)$ und überführt das System (2.8) von x_0 aus zur Zeit $T > t_0$ nach x_T.

[62] Roberto Triggiani, geboren 1942.

Beweis. Unter Benutzung von (2.18) folgt mit j-facher partieller Integration

$$\int_{t_0}^{T} S(T-t)BK_{j+1}\psi^{(j)}(t)\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{T} S(T-t)A^jBK_{j+1}\psi(t)\mathrm{d}t$$

für $j = 0, \ldots, n-1$. Somit

$$\int_{t_0}^{T} S(T-t)B\widetilde{u}(t)\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{T} S(T-t)(A|B)K\psi(t)\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{T} S(T-t)\psi(t)\mathrm{d}t.$$

Beachtet man die Definition von ψ und Gleichung (2.17), so folgt

$$\begin{aligned} y^{x_0,\widetilde{u}}(T) &= S(T-t_0)x_0 + \int_{t_0}^{T} S(T-t)\big(S(t-T)(x_T - S(T-t_0)x_0)\big)\varphi(t)\mathrm{d}t \\ &= S(T-t_0)x_0 + (x_T - S(T-t_0)x_0)\int_{t_0}^{T} \varphi(t)\mathrm{d}t = x_T, \end{aligned}$$

was den Beweis beendet. □

Abschließend wollen wir zwei Anwendungsbeispiele vorstellen.

2.54 Beispiel. Wir betrachten die skalare Oszillatorgleichung

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = u(t),$$

wobei die Steuerung u als äußere Kraft auf das System wirkt. Abbildung 7 stellt für verschiedene Werte von ω die L^2-optimale Kontrolle graphisch dar, welche das System von $x_0 = (2, -1)^T$ aus nach $x_T = (-5, 2)^T$ zum Zeitpunkt $T = 60$ überführt.

2.55 Beispiel. Ein wärmeleitender Stab belege das Gebiet $\Omega := (0, L)$ des $\mathbb{R}^1$. Die Funktion $\theta\colon [0,\infty) \times \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ beschreibe die (relative) Temperatur zur Zeit $t \geq 0$ am Ort $x \in \bar{\Omega}$. Mit $\rho > 0$ bzw. $c_\rho > 0$ seien die Massen- bzw. Wärmeleitungsdichte des Stoffes und mit $\kappa > 0$ die Wärmeleitfähigkeit bezeichnet. Der Stab sei am rechten Rand thermisch isoliert. Am linken Rand sei der Wärmefluss in Normalenrichtung durch eine Steuerungsfunktion $u\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ bestimmt. Dann genügt θ folgendem Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t\theta(t,x) - \tfrac{\kappa}{\rho c_\rho}\partial_{xx}\theta(t,x) &= 0 \text{ für } (t,x) \in (0,\infty)\times\Omega, \\ -\tfrac{\kappa}{\rho c_\rho}\partial_x\theta(t,0) &= u(t) \text{ für } t \in (0,\infty), \\ \partial_x\theta(t,L) &= 0 \text{ für } t \in (0,\infty), \\ \theta(0,x) &= \theta^0(x) \text{ für } x \in \Omega. \end{aligned} \tag{2.19}$$

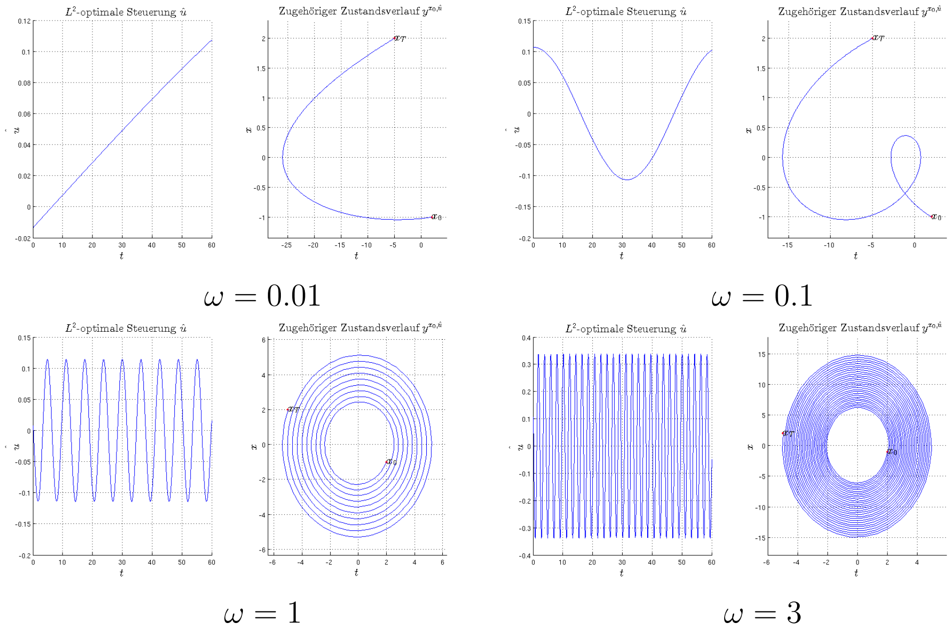

Abbildung 7: Oszillator

Wir betrachten eine Semidiskretisierung der Gleichung (2.19) im Ort. Hierzu überziehen wir Ω mit einem äquidistanten Gitter

$$\Omega_h := \{x_j := jh \,|\, j = 0, \dots, n+1\},$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ und $h := \frac{L}{n+1}$. Ferner sei $\mathring{\Omega}_h := \{jh \,|\, j = 1, \dots, n\}$ und sei $L^2(\mathring{\Omega}_h) := \{u \,|\, u \colon \mathring{\Omega}_h \to \mathbb{R}\}$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle \theta, \psi \rangle_{L^2(\mathring{\Omega}_h)} := h \sum_{j=1}^{n} \theta(x_j)\psi(x_j).$$

Diskretisiert man den Neumann[63]-Laplaceoperator mit Hilfe der Finiten Differenzen und beachtet die Isometrie zwischen $L^2(\mathring{\Omega}_h)$ und $\mathbb{R}^n$, so kann man den diskretisierten Operator $\frac{\kappa}{\rho c_\rho} \triangle_h$ in der Matrixschreibweise

$$A_h := \frac{\kappa}{\rho c_\rho} \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

[63] Carl Gottfried Neumann, Mai 1832 – 27. März 1925.

angeben. Änhlich kann man $\partial_x \theta|_{x=0}$ mittels $\frac{1}{h}(\theta(x_1) - \theta(x_0))$ diskretisieren. Definiert man nun $B_h := (-1/h, 0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, so ergibt sich ein endlichdimensionales Kontrollproblem für θ_h

$$\dot{\theta}_h(t) = A_h \theta_h(t) + B_h u_h(t) \text{ für } t > 0, \quad \theta_h(0) = \theta_h^0.$$

Ferner zeigen wir, dass $\operatorname{rank}(A_h|B_h) = n$ gilt. Man sieht leicht, dass $(A_h|B_h)$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Außerdem zeigt man, dass

$$(A_h^k)_{ii} \neq 0 \text{ für } k \in \mathbb{N}, i = 1, \ldots, n$$

gilt. Damit ist

$$\det(A_h|B_h) = \prod_{k=1}^{n} (A_h^k)_{ii} \neq 0$$

und daher ist $\operatorname{rank}(A_h|B_h) = n$.

Exemplarisch nehmen wir an, dass der Stab der Länge $L = 0,5$ m aus Stahl[64] besteht. Abbildung 8 illustriert die L^2-optimale Kontrolle $\hat{u}$ mit $\|\hat{u}\|_{L^2(0,60;\mathbb{R})} \approx 37.9733$, welche das System für $h = 1/51$ von $\theta_h^0 \equiv 300$ °C aus in den Null-Zustand nach $T = 60$ s überführt, sowie die zugehörige Lösung. Die Lösung ist regulär und die

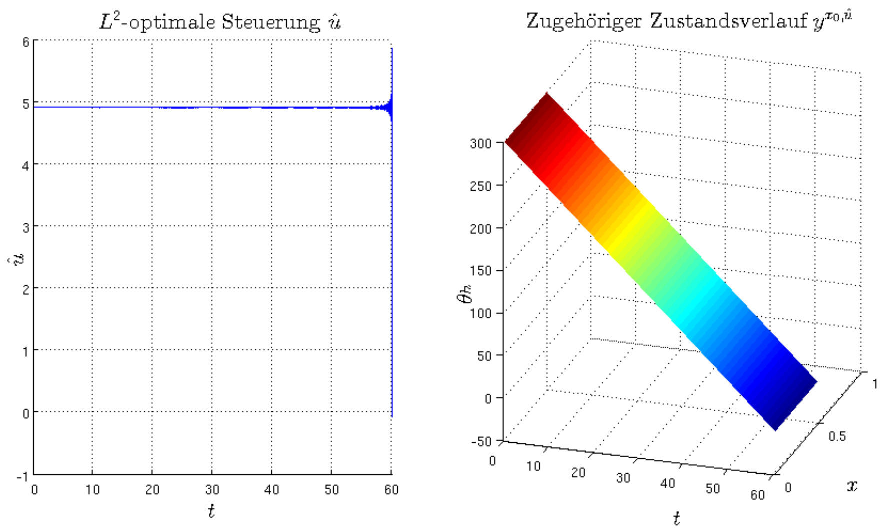

Abbildung 8: Null-Steuerbarkeit

L^2-optimale Kontrolle $\hat{u}$ ist mäßig oszillierend.

Versucht man das System von $\theta_h^0 = 30 + \cos(\frac{4\pi}{l}\cdot)$ aus nach $\theta_h^T = 500 + \cos(\frac{2\pi}{l}\cdot)$ zu überführen, so ist die zugehörige L^2-optimale Steuerung $\hat{u}$ sehr stark oszillierend und die numerische Lösung weist deutliche Diskrepanzen zu den Zielvorgaben auf.

[64] Unlegierter Stahl: $\rho = 7,85$ kg/m^3, $c_\rho = 0,47$ kJ/(kg · K), $\kappa = 54$W/(M · K).

Außerdem gilt $\|\hat{u}_h\|_{L^2(0,60;\mathbb{R})} \approx 47701$. Für $h \to 0$ verschlechtern sich die Resultate sogar, was damit zu begründen ist, dass die kontinuierliche Wärmeleitungsgleichung nicht exakt (Rand)steuerbar ist.

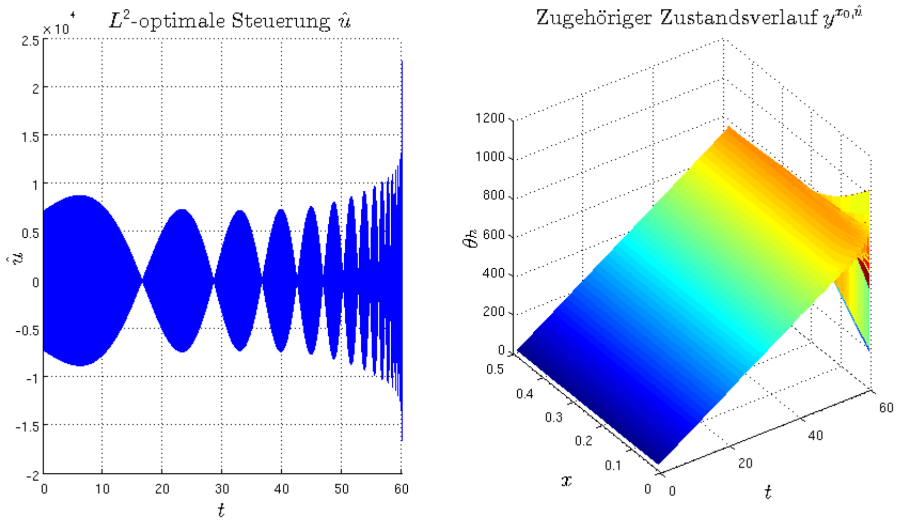

Abbildung 9: Steuerbarkeit

2.2.3. Beobachtbarkeit und Gramscher Beobachtsbarkeitsoperator

Wir betrachten zunächst das volle Kontrollproblem

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)u(t) \text{ für } t \in I, \quad y(t_0) = x \in X, \tag{2.20}$$
$$w(t) = C(t)y(t) + D(t)u(t) \text{ für } t \in I, \tag{2.21}$$

wobei die Operatorfamilien wie früher seien. In Übereinstimmung mit dem vorherigen Kapitel bezeichnen wir mit $y^{x,u} \in \mathcal{X}$ und $w^{x,u} \in \mathcal{Y}$ die zum Anfangswert $x \in X$ und der Steuerung $u \in \mathcal{U}$ gehörige Zustands- bzw. Beobachtungsfunktion, welche nach Satz (2.31) eindeutig bestimmt sind.

Zum Kontrollproblem (2.20)–(2.21) gehört das sogenannte *duale Problem*

$$\dot{z}(t) = A'(t)z(t) + C'(t)v(t) \text{ für } t \in I, \quad z(t_0) = x' \in X', \tag{2.22}$$
$$h(t) = B'(t)z(t) + D'(t)v(t) \text{ für } t \in I. \tag{2.23}$$

Will man bei festem u anhand der Messung w den Zustand y auf (t_0, T) schätzen, was wiederum zur Schätzung des Anfangswerts x äquivalent ist, kann man z.B. folgendes Minimierungsproblem betrachten:

$$\hat{x} = \arg\min_{x \in X} \int_{t_0}^{T} \|C(t)y^{x,u}(t) - w(t)\|_Y^\nu \mathrm{d}t,$$

welches aus Konvexitätsgründen ein Minimum besitzt. Die Frage, ob dieses eindeutig ist und ob das Funktional die Null als globales Minimum hat, hängt mit dem Begriff der Beobachtbarkeit zusammen.

2.56 Definition. Das System (2.20)–(2.21) heißt *zum Zeitpunkt* $T \in I \backslash \{t_0\}$ *zum Input* $u \in \mathcal{U}$

(i) *approximativ beobachtbar*, wenn für alle $x, \widetilde{x} \in X$ aus $w^{x,u} \equiv w^{\widetilde{x},u}$ auf (t_0, T) bereits $x = \widetilde{x}$ folgt.

(ii) *terminal beobachtbar*, wenn es ein $c > 0$ so gibt, dass $\|y^{x,u}(T) - y^{\widetilde{x},u}(T)\|_X \leq c\,\|w^{x,u} - w^{\widetilde{x},u}\|_{L^\nu(t_0,T;Y)}$ für alle $x, \widetilde{x} \in X$ gilt.

(iii) *exakt beobachtbar*, wenn es eine Konstante $c > 0$ so gibt, dass $\|x - \widetilde{x}\|_X \leq c\,\|w^{x,u} - w^{\widetilde{x},u}\|_{L^\nu(t_0,T;Y)}$ für alle $x, \widetilde{x} \in X$ gilt.

2.57 Bemerkung.

(i) Offensichtlich ist die exakte Beobachtbarkeit nach Satz 2.31 dazu äquivalent, dass es ein $\widetilde{c} > 0$ so gibt, dass

$$\|y^{x,u} - y^{\widetilde{x},u}\|_{W^{1,p}(t_0,T;X)} \leq \widetilde{c}\,\|w^{x,u} - w^{\widetilde{x},u}\|_{L^\nu(t_0,T;Y)} \text{ für alle } x, \widetilde{x} \in X \text{ gilt.}$$

(ii) Im Endlichdimensionalen sind alle drei Begriffe äquivalent.

(iii) Eine adäquatere Bezeichnung für „approximative, terminale bzw. exakte Beobachtbarkeit" wäre „Beobachtbarkeit", „stetige terminale Beobachtbarkeit" bzw. „stetige Beobachtbarkeit". Es hat sich aber erstere Nomenklatur etabliert, da sie einen unmittelbaren Bezug zu entsprechenden Steuerbarkeitsbegriffen herstellt.

2.58 Lemma (Übung)**.** *Das volle System (2.20)–(2.21) ist genau dann für jede Kontrolle* $u \in \mathcal{U}$ *zum Zeitpunkt* $T \in I \backslash \{t_0\}$ *approximativ beobachtbar, terminal beobachtbar bzw. exakt beobachtbar, wenn es zum Zeitpunkt* T *zum Null-Input approximativ beobachtbar, terminal beobachtbar bzw. exakt beobachtbar ist.*

2.59 Bemerkung. Bei nichtlinearen Kontrollproblemen liegt eine solche Äquivalenz nicht vor. So wird die Kontrolle in der Regel „willkürlich" fest gewählt. Bei anderen Anwendungen geht man sogar von mehreren Beobachtungsreihen zu endlich oder unendlich vielen Inputs aus. Dies ist z.B. bei den „Inversen Problemen" oft der Fall, bei denen es darum geht, die unbekannten, ungenau oder teilweise bekannten Operatorfamilien A, B, C, D zu bestimmen oder zu schätzen.

Wegen Lemma 2.58 können wir in unserem Fall ohne Einschränkung vom Null-Input ausgehen. Aus (2.20)–(2.21) ergibt sich das *reduzierte* Kontrollproblem

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) \text{ für } t \in I, \quad y(t_0) = x \in X, \tag{2.24}$$
$$w(t) = C(t)y(t) \text{ für } t \in I. \tag{2.25}$$

Mit $y^x \in \mathcal{X}$ bzw. $w^x \in \mathcal{Y}$ bezeichnen wir die zum Anfangswert x gehörige Zustands- bzw. Ausgangsfunktion.

Das zugehörige reduzierte duale Problem lautet

$$\dot{z}(t) = A'(t)z(t) + C'(t)v(t) \text{ für } t \in I, \quad z(t_0) = x'. \tag{2.26}$$

Als Analogon zum Steuerungs-Zustands-Operator ergibt sich:

2.60 Definition. Die Abbildung $\mathcal{M}_T \colon X \to L^\nu(t_0, T; Y)$ gegeben durch

$$(\mathcal{M}_T x)(t) := C(t)S(t)x \text{ für } t \in (t_0, T)$$

heißt *Zustands-Beobachtungs-Operator.*

Offensichtlich ist $\mathcal{M}_T \in L(X, L^\nu(t_0, T; Y))$ wohldefiniert.

2.61 Definition. Seien X, Y, Z Banachräume und seien $A \in L(X, Y)$, $B \in L(X, Z)$.

(i) A heißt *nach unten durch B beschränkt*, wenn es ein $c > 0$ so gibt, dass $\|Ax\|_Y \geq c\,\|Bx\|_Z$ für alle $x \in X$ gilt.

(ii) A heißt *nach unten beschränkt*, wenn es durch $\mathrm{id}_X \in L(X)$ nach unten beschränkt ist.

2.62 Satz (Übung)**.** *Sei $T \in I \backslash \{t_0\}$. Das reduzierte Problem (2.24)–(2.25) ist genau dann zur Zeit T*

(i) *approximativ beobachtbar, wenn $\mathcal{M}_T$ injektiv ist.*

(ii) *terminal beobachtbar, wenn $\mathcal{M}_T$ nach unten durch $S(T)$ beschränkt ist.*

(iii) *exakt beobachtbar, wenn $\mathcal{M}_T$ nach unten beschränkt ist.*

Um den Operator $\mathcal{M}_T$ genauer untersuchen zu können, beschränken wir uns zunächst auf den Hilbertraumfall. Es gelte also $p = \nu = 2$ und X, Y seien Hilberträume.

2.63 Definition. Sei $T \in I\backslash\{t_0\}$. Der lineare Operator $\mathcal{R}_T\colon X \to X$ mit

$$\mathcal{R}_T := \int_{t_0}^{T} S^*(t)C^*(t)C(t)S(t)\mathrm{d}t$$

heißt *Gramscher Beobachtbarkeitsoperator.*

Offensichtlich ist $\mathcal{R}_T \in L(X)$. Außerdem gilt für alle $x, y \in X$

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{R}_T x, y\rangle_X &= \Big\langle \Big(\int_{t_0}^{T} S^*(t)C^*(t)C(t)S(t)\mathrm{d}t\Big) x, y\Big\rangle_X \\
&= \int_{t_0}^{T} \langle S^*(t)C^*(t)C(t)S(t)x, y\rangle_X \mathrm{d}t \\
&= \int_{t_0}^{T} \langle x, S^*(t)C^*(t)C(t)S(t)y\rangle_X \mathrm{d}t \\
&= \langle x, \mathcal{R}_T y\rangle_X.
\end{aligned}$$

Deshalb ist $\mathcal{R}_T$ symmetrisch und damit selbstadjungiert. Wegen

$$\langle \mathcal{R}_T x, x\rangle_X = \int_{t_0}^{T} \|C(t)S(t)x\|_Y^2 \mathrm{d}t \geq 0$$

ist $\mathcal{R}_T$ überdies positiv semidefinit.

2.64 Satz. *Das reduzierte System (2.24)–(2.25) ist genau dann zur Zeit $T \in I\backslash\{t_0\}$ exakt beobachtbar, wenn $\mathcal{R}_T$ stetig invertierbar ist.*

Beweis. Für alle $x \in X$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{T} \|w^x(t)\|_Y^2 \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{T} \|C(t)y^x(t)\|_Y^2 \mathrm{d}t &= \int_{t_0}^{T} \|\mathcal{M}_T(t)x\|_Y^2 \mathrm{d}t \\
&= \int_{t_0}^{T} \langle C(t)S(t)x, C(t)S(t)x\rangle_Y \mathrm{d}t \\
&= \int_{t_0}^{T} \langle S^*(t)C^*(t)C(t)S(t)x, x\rangle_X \mathrm{d}t \\
&= \langle \mathcal{R}_T x, x\rangle_X.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

„$\Rightarrow$": Ist das System exakt beobachtbar, so gibt es ein $c > 0$ so, dass

$$\|x\|_X \leq c\|w^x\|_{L^2(t_0,T;Y)}$$

und damit auch

$$\tfrac{1}{c^2}\|x\|_X^2 \leq \langle \mathcal{R}_T x, x\rangle_X$$

für alle $x \in X$ gilt, woraus sich mit dem Lemma von Lax[65] & Milgram[66] die stetige Invertierbarkeit von $\mathcal{R}_T$ ergibt.

„$\Leftarrow$": Umgekehrt sei nun $\mathcal{R}_T$ stetig invertierbar. Wegen der positiven Semidefinitheit von $\mathcal{R}_T$ gilt

$$\alpha := \inf_{\|x\|_X = 1} \langle \mathcal{R}_T x, x \rangle_X \geq 0.$$

Wir wollen zeigen, dass $\alpha > 0$ gilt. Angenommen, es ist $\alpha = 0$. Aus Konvexitätsgründen gibt es dann ein $x \in X$ mit $\langle \mathcal{R}_T x, x \rangle_X = 0$. Zu $\lambda > 0$ setzen wir $x_\lambda := (\lambda \mathrm{id}_X - \mathcal{R}_T)x$ und finden

$$\langle \mathcal{R}_T x_\lambda, x_\lambda \rangle_X = \langle \mathcal{R}_T(\lambda^2 \mathrm{id}_X - 2\lambda \mathcal{R}_T + \mathcal{R}_T^2)x, x \rangle_X = -2\lambda \|\mathcal{R}_T x\|_X^2 + \langle \mathcal{R}_T^3 x, x \rangle_X.$$

Würde nun $\|\mathcal{R}_T x\|_X > 0$ gelten, dann wäre der obige Audruck negativ für hinreichend große λ, was einen Widerspruch zur positiven Semidefinitheit von $\mathcal{R}_T$ darstellen würde. Also ist $\mathcal{R}_T x = 0_X$ und damit $x = 0_X$, da $\mathcal{R}_T$ invertierbar ist. Dies widerspricht der Annahme $\|x\|_X = 1$. Daher ist $\alpha > 0$ und es gilt

$$\|x - \widetilde{x}\|_X^2 \leq \tfrac{1}{\alpha} \langle \mathcal{R}_T(x - \widetilde{x}), x - \widetilde{x} \rangle_X = \tfrac{1}{\alpha} \int_{t_0}^T \|w^x(t) - w^{\widetilde{x}}(t)\|_Y^2 \mathrm{d}t.$$

für alle $x, \widetilde{x} \in X$.

Dies beendet den Beweis. □

Sind die Operatorfamilien A und C konstant, so handelt es sich bei $(S(t))_{t \in \mathbb{C}}$ um eine holomorphe Gruppe und es gilt nach Substitution $s := t + t_0$

$$\mathcal{R}_T = \int_0^{T - t_0} S^*(s - t_0) C^* C S(s - t_0) \mathrm{d}s = \int_0^{T - t_0} S^*(s) C^* C S(s) \mathrm{d}s,$$

da $S(t_0) = S^*(t_0) = \mathrm{id}_X$.

Beachte außerdem, dass für konstante Operatorfamilien C

$$w^x = \mathcal{M}_T x = C(\cdot) S(\cdot) x \in C^0([t_0, T], Y)$$

für $x \in X$ folgt, da $S(\cdot)x \in W^{1,2}(t_0, T; X) \hookrightarrow C_b^0([t_0, T], X)$ gilt.

2.65 Lemma. *Seien A und C konstant. Das System (2.24)–(2.25) ist genau dann zur Zeit $T \in I \backslash \{t_0\}$ approximativ beobachtbar, wenn es zu jedem $x \in X \backslash \{0_X\}$ ein $t \in (t_0, T]$ so gibt, dass $(\mathcal{M}_T x)(t) \neq 0_Y$ gilt.*

[65] Peter David Lax, geboren am 1. Mai 1926.
[66] Arthur Norton Milgram, 3. Juni 1912 – 30. Januar 1961.

Beweis. „$\Rightarrow$": Ist das System approximativ beobachtbar, so folgt wegen der Injektivität von $\mathcal{M}_T$ bereits $\mathcal{M}_T x \neq 0_Y$ auf einer Teilmenge $\widetilde{I} \subset (t_0, T)$ mit Maß $\lambda(\widetilde{I}) > 0$ für alle $x \in X \backslash \{0_X\}$. Damit existiert ein $t \in \widetilde{I}$ so, dass $\mathcal{M}_T(t) \neq 0_Y$ gilt.

„$\Leftarrow$": Umgekehrt sei nun $x \in X\backslash\{0_X\}$ beliebig und es gebe ein $t \in (t_0, T]$ mit $(\mathcal{M}_T x)(t) \neq 0_Y$. Wegen der Stetigkeit von $\mathcal{M}_T x$ gibt es ein offenes $\widetilde{I} \subset I$ so, dass $\|(\mathcal{M}_T x)(t)\|_Y > 0$ für $t \in \widetilde{I}$ gilt. Damit folgt

$$\|w^x\|^2_{L^2(t_0,T;Y)} \geq \int_{\widetilde{I}} \|w^x(t)\|^2_Y \mathrm{d}t > 0,$$

was die Injektivität von $\mathcal{M}_T$ bedeutet.

Dies beendet den Beweis. □

Zum Abschluss des Abschnittes seien $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^k$ endlichdimensional und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{k\times n}$ konstant. In diesem Fall gilt ein duales Analogon des Kálmánschen Satzes.

2.66 Satz. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Das System (2.24)–(2.25) ist für ein $T \in I\backslash\{t_0\}$ exakt beobachtbar.*

(ii) *Das System (2.24)–(2.25) ist für alle $T \in I\backslash\{t_0\}$ exakt beobachtbar.*

(iii) *Die Matrix $\mathcal{R}_T$ ist für ein $T \in I\backslash\{t_0\}$ invertierbar.*

(iv) *Die Matrix $\mathcal{R}_T$ ist für alle $T \in I\backslash\{t_0\}$ invertierbar.*

(v) $\operatorname{rank}(A^*|C^*) = n$.

Beweis. Die Implikationen „(ii) $\Rightarrow$ (i)" und „(iv) $\Rightarrow$ (iii)" sind trivial. Die Äquivalenz „(i) $\Leftrightarrow$ (iii)" gilt nach Satz 2.64.

Da es sich beim Gramschen Steuerbarkeitsoperator

$$\mathcal{Q}_{T;A^*,C^*} := \int_{t_0}^{T} S^*(T-t)C^*CS(T-t)\mathrm{d}t = \int_0^{T-t_0} S^*(s)C^*CS(s)\mathrm{d}s$$

um $\mathcal{R}_T$ handelt, gilt nach Lemma 2.50

$$\begin{aligned}\ker(\mathcal{R}_T) &= (\operatorname{im}(\mathcal{Q}_{T;A^*,C^*}))^\perp = (\operatorname{im}(\mathcal{L}_{T;A^*,C^*}\mathcal{L}^*_{T;A^*,C^*}))^\perp \\ &= (\operatorname{im}(\mathcal{L}_{T;A^*,C^*}))^\perp = (\operatorname{im}(l_{n;A^*,C^*}))^\perp,\end{aligned}$$

weshalb $\ker(\mathcal{R}_T)$ nicht von T abhängt. Gilt $\ker(\mathcal{R}_T) = \{0_X\}$ für ein $T \in I\backslash\{t_0\}$, so muss dies in ganz $I\backslash\{t_0\}$ gelten. Also sind (iii) und (iv) äquivalent.

Die Äquivalenz von (i) und (v) folgt aus dem Kálmánschen Satz angewendet auf das duale Problem. □

Abschließend stellen wir ein weiteres für die Praxis wichtiges Resultat vor.

2.67 Satz (Hautus[67] Test). *Das System (2.24)–(2.25) ist genau dann für alle* $T > t_0$ *exakt beobachtbar, wenn*

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A - \lambda \mathrm{I}_{n\times n} \\ C \end{pmatrix} = n \text{ für alle } \lambda \in \sigma(A) \text{ gilt.}$$

Beweis. Ohne Einschränkung sei $t_0 = 0$.

„$\Leftarrow$" Wir betrachten den abgeschlossenen Unterraum $N := \ker(\mathcal{M}_T)$ von X, wobei wir wissen, dass dieser nicht von T abhängt. Angenommen, das System wäre nicht zur Zeit T exakt beobachtbar, dann wäre $N \neq \{0_X\}$. Offensichtlich ist N unter $(e^{tA})_{t\geq 0}$ invariant, denn: gilt $Ce^{tA}x = 0_Y$ für alle $t \in [0, T]$ und damit auch $t \in \mathbb{C}$, so folgt $Ce^{tA}e^{sA}x = 0_Y$ für alle $t, s \in \mathbb{C}$. Ferner gilt (insbesondere) für alle $t \in \mathbb{R}$
$$A(N) = \Big(e^{-tA}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{tA}\Big)(N) \subset N.$$
Betrachte die trunkierte Restriktion $A_N \in L(N)$ von A auf N, wobei N mit der $\|\cdot\|_X$-Norm versehen ist. Offensichtlich ist $\emptyset \neq \sigma(A_N) \subset \sigma(A)$, da $N \neq \{0_X\}$. Sei $\lambda \in \sigma(A_N)$ und sei $x_\lambda \in N$ ein zugehöriger Eigenvektor. Dann gilt $Cx_\lambda = (\mathcal{M}_T x)(0) = 0_Y$ und somit

$$\begin{pmatrix} A - \lambda \mathrm{I}_{n\times n} \\ C \end{pmatrix} x_\lambda = 0_X \Rightarrow \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A - \lambda \mathrm{I}_{n\times n} \\ C \end{pmatrix} < n,$$

was einen Widerspruch darstellt.

„$\Rightarrow$" Gilt umgekehrt $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A - \lambda \mathrm{I}_{n\times n} \\ C \end{pmatrix} < n$ für ein $\lambda \in \sigma(A)$, dann gibt es ein $x_\lambda \in X\backslash\{0_X\}$ mit $(A - \lambda \mathrm{I}_{n\times n})x_\lambda = 0_X$ und $Cx_\lambda = 0_Y$. Ferner gilt $e^{tA}x_\lambda = e^{\lambda t}x_\lambda$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und daher $\mathcal{M}_T x_\lambda \equiv 0_Y$ für alle $T > 0$.

Dies beendet den Beweis. □

2.68 Korollar. *Das Paar* (A, B) *(d.h. das System* $\dot{y} = Ay + Bu$*) ist genau dann vollständig exakt steuerbar, wenn*

$$\operatorname{rank}(A - \lambda \mathrm{I}_{n\times n} \quad B) = n \text{ für alle } \lambda \in \sigma(A) \text{ gilt.}$$

[67] Malo Hautus

2.69 Satz (Übung). *Seien $n, m, k \in \mathbb{N}$ und seien $M, D, K \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{k\times n}$, wobei M positiv definit sei. Das System*

$$\begin{aligned} M\ddot{y} + D\dot{y} + Ky &= Bu \text{ in } (0,\infty), \\ w &= C_1 y + C_2 \dot{y} \text{ in } (0,\infty) \end{aligned}$$

ist genau dann

(i) *exakt steuerbar, wenn*

$$\operatorname{rank}(M\lambda^2 + D\lambda + K \quad B) = n,$$

(ii) *exakt beobachtbar, wenn*

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} M\lambda^2 + D\lambda + K \\ C_1 + C_2\lambda \end{pmatrix} = n$$

für alle $\lambda \in \Lambda$ gilt, wobei $\Lambda := \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, \det(M\lambda^2 + D\lambda + K) = 0\}$.

2.70 Beispiel (Bestimmung der Rotation eines Satelliten[68]). Wir betrachten einen (künstlichen) Satelliten der Erde, welcher sich in der Nähe des Gleichgewichts bzgl. eines orbitalen Koordinatensystems bewegt. Mit $\theta := (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T$ seien die Winkel zwischen dem Orbital- und dem Hauptachsenkoordinatensystem[69] des Satelliten bezeichnet. Die Funktion θ hänge von $\tau = \omega_0 t$ ab, wobei t die Zeitvariable und ω_0 die Winkelgeschwindigkeit des Baryzentrums bzgl. des Orbits bezeichne. Ferner sei $\omega_i = \frac{\omega_i^*}{\omega_0}$, $i = 1, 2, 3$, wobei ω_i^* für die i-te Komponente der absoluten Winkelgeschwindigkeit des Satelliten steht. Die linearisierten Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\dot{\theta}_1 = \theta_2 + \omega_2, \quad \dot{\theta}_2 = -\theta_1 + \omega_1, \quad \dot{\theta}_3 = -1 + \omega_3, \tag{2.28}$$

$$\ddot{\theta}_1 = -\kappa_1^2 + b_1\dot{\theta}_2, \quad \ddot{\theta}_2 = -\kappa_2^2\theta_2 + b_2\dot{\theta}_1, \quad \ddot{\theta}_3 = -\kappa_3^2\theta_3, \tag{2.29}$$

wobei

$$\begin{aligned} \kappa_1^2 = \tfrac{B-A}{C}, \quad \kappa_2^2 = 4\tfrac{B-C}{A}, \quad \kappa_3^2 = 3\tfrac{A-C}{B}, \\ b_1 = \tfrac{C-B+A}{C}, \quad b_2 = \tfrac{B-C-A}{A} \end{aligned}$$

und $B > A > C > 0$ die zentralen Inertialmomente des Satelliten bezeichnen.

Wir nehmen ferner an, dass sich der Winkelvektor ω mit Hilfe eines Sensors am Satelliten gemäß

$$\omega_i^{\text{mess}} = \omega_i + \nu_i, \quad i = 1, 2, 3$$

[68]Quelle: Beletsky, V. V., Motion of an artificial satellite about its center of mass, Israel program for scientific translations, Jerusalem (1966).

[69]In der technischen Literatur werden die Koordinaten bzgl. dieses Systems „Roll-Nick-Gier-Winkel" oder „roll-pitch-yaw angle" genannt.

messen lässt, wobei ν_i den (konstanten) systematischen Messfehler (Bias) bezeichnet. In diesem Fall entfallen Gleichungen (2.29). Desweiteren sei angenommen, dass sich auch die Position der Sonne am beleuchteten Teil des Orbits mit Hilfe eines weiteren Sensors messen lässt. Die Koordinaten des vom Baryzentrum des Satelliten auf die Sonne gerichteten Einheitsvektors lauten dann

$$l_1 = \alpha_1 \cos\tau - \alpha_3 \sin\tau, \quad l_2 = \alpha_2, \quad l_3 = \alpha_1 \sin\tau + \alpha_3 \cos\tau,$$

wobei sich die Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ anhand des Orbits des Satelliten bestimmen lassen. Die Beobachtungsgleichungen schreiben sich zu

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \alpha_2\theta_1 - (\alpha_1 \sin\tau + \alpha_3 \cos\tau)\theta_3, \\ \sigma_2 &= -\alpha_2\theta_2 + (\alpha_1 \cos\tau - \alpha_3 \sin\tau)\theta_3. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Mit Gleichung (2.28) folgt

$$\dot\theta_1 = \theta_2 + \omega_2, \quad \dot\theta_2 = -\theta_1 + \omega_1, \quad \dot\nu_1 = 0, \quad \dot\nu_3 = 0, \tag{2.31}$$

$$\dot\theta_3 = -1 + \omega_3, \quad \dot\nu_2 = 0. \tag{2.32}$$

Wir möchten das Kontrollproblem (2.31), (2.32), (2.30) auf Beobachtbarkeit untersuchen. Dabei ist zu beachten, dass die Beobachtungsmatrix nicht autonom ist. Wir substituieren

$$z_1 = e^{i\tau}\theta_3, \quad z_2 = e^{i\tau}\nu_2, \quad \bar z_1 = e^{-i\tau}\theta_3, \quad \bar z_2 = e^{-i\tau}\nu_2.$$

Dies führt auf zwei entkoppelte lineare Kontrollprobleme mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{aligned} \dot z_1 = iz_1 - z_2, \quad \dot z_2 = iz_2, \quad \dot{\bar z}_1 = -i\bar z_1 - \bar z_2, \quad \dot{\bar z}_2 = -i\bar z_2, \\ \dot\theta_1 = \theta_2 + \omega_2, \quad \dot\theta_2 = -\theta_1 + \omega_1, \quad \dot\nu_1 = 0, \quad \dot\nu_2 = 0, \\ \sigma_1 = \alpha_2\theta_1 - \beta z_1 - \bar\beta \bar z_1, \quad \sigma_2 = -\alpha_2\theta_2 + i\beta z_1 - i\bar\beta\bar z_1, \\ \omega_1^{\text{mess}} = \omega_1 + \nu_1, \quad \omega_2^{\text{mess}} = \omega_2 + \nu_2 \end{aligned} \tag{2.33}$$

sowie

$$\begin{aligned} \dot\theta_3 = -1 + \omega_3, \quad \dot\nu_3 = 0, \\ \omega_3^{\text{mess}} = \omega_3 + \nu_3, \end{aligned} \tag{2.34}$$

worin $\beta := \frac{1}{2}(\alpha_3 - i\alpha_1)$. Beim Übergang ins Reelle im System (2.33) erhält man ein Kontrollproblem für einen zehndimensionalen Zustandsvektor mit vierdimensionaler Beobachtung. Unter Verwendung der Kálmánschen Rangbedingung stellt man fest, dass Systeme (2.33) und (2.34) exakt beobachtbar sind, was auch die exakte Beobachtbarkeit des ursprünglichen Systems nach sich zieht.

2.2.4. Dualität zwischen Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

In diesem Abschnitt wollen wir die Dualität zwischen Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit im allgemeinen Banachraumfall untersuchen.

Analog zur skalaren Situation gilt

2.71 Lemma. *Seien X ein reflexiver Banachraum, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $p \in [1, \infty)$. Dann sind die Räume*

$$L^{p'}(I, X') \text{ und } (L^p(I, X))' \text{ mit } p' \in (1, \infty], \quad \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{p'} = 1$$

isometrisch isomorph, wobei

$$L^{p'}(I, X') \to (L^p(I, X))', \quad g \mapsto \left(f \mapsto \int_I \langle g(t), f(t)\rangle_{X';X} \mathrm{d}t\right)$$

der isometrische Isomorphismus ist.

Damit kann man jedes lineare beschränkte Funktional auf $L^p(I, X)$ über die duale Paarung mit einem Element aus $L^{p'}(I, X')$ eindeutig darstellen bzw. mit diesem Element assoziieren.

Wir betrachten zunächst den Steuerungs-Zustands-Operator $\mathcal{L}_T \in L(L^q(t_0, T; U), X)$. Analog zur Hilbertraumsituation ergibt sich $\mathcal{L}'_T \in L(X', (L^q(t_0, T; U))')$ mit

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}'_T x')(u) := x'(\mathcal{L}_T u) &= \int_{t_0}^T x'(S(T)S^{-1}(t)B(t)u(t))\mathrm{d}t \\ &= \int_{t_0}^T \langle x', S(T)S^{-1}(t)B(t)u(t)\rangle_{X';X} \mathrm{d}t \\ &= \int_{t_0}^T \langle B'(t)(S'(t))^{-1}S'(T)x', u(t)\rangle_{U';U} \mathrm{d}t\end{aligned}$$

für $x' \in X'$, $u \in L^q(t_0, T; U)$. Es ist $t \mapsto B'(t)(S'(t))^{-1}S'(T)x' \in L^r(t_0, T; U') \hookrightarrow L^{q'}(t_0, T; U')$, da $q' \leq r$. Daher kann man $\mathcal{L}'_T$ als ein Element von $L(X', L^{q'}(t_0, T; U'))$ mit

$$(\mathcal{L}'_T x')(t) = B'(t)(S'(t))^{-1}S'(T)x' \text{ für } x' \in X' \text{ und fast alle } t \in [t_0, T]$$

auffassen.

Im Folgenden beweisen wir Dualitätsresulate, welche die aus der Funktionalanalysis bekannten Sätze auf Banachräume übertragen.

2.72 Definition. Sei X ein normierter Raum und seien $U \subset X$ und $V \subset X'$ nichtleer. Die Mengen

$$\begin{aligned} U^\perp &:= \{x' \in X' \mid \langle x', x\rangle_{X';X} = 0 \text{ für alle } x \in U\} \text{ und} \\ V_\perp &:= \{x \in X \mid \langle x', x\rangle_{X';X} = 0 \text{ für alle } x' \in V\}\end{aligned}$$

heißen der *Annihilator von U in X'* bzw. der *Annihilator von V in X*.

2.73 Lemma. *Es gilt:*

(i) $U^\perp$, $V_\perp$ *sind abgeschlossene Unterräume von* X' *bzw.* X.

(ii) $U \subset (U^\perp)_\perp$ *und* $V \subset (V_\perp)^\perp$.

(iii) $(U^\perp)_\perp = \mathrm{cl}(\mathrm{span}(U), \|\cdot\|_X)$.

Beweis. (i) Offensichtlich sind $U^\perp$, $V_\perp$ Vektorräume. Ferner gilt für $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U^\perp$ mit $x'_n \to x' \in X'$ für $n \to \infty$

$$\langle x', x\rangle_{X';X} = \langle \lim_{n\to\infty} x'_n, x\rangle_{X';X} = \lim_{n\to\infty} x'_n(x) = 0 \text{ für alle } x \in U,$$

d.h. $x' \in U^\perp$ und $U^\perp$ ist abgeschlossen. Analog folgt die Abgeschlossenheit von $V_\perp$.

(ii) Die Aussage folgt direkt aus der Definition von $(U^\perp)_\perp$ bzw. $(V_\perp)^\perp$.

(iii) „$\subset$" Diese Inkusion folgt mit dem Satz von Hahn[70] & Banach: Würde ein Element $x \in (U^\perp)_\perp$ im Komplement des abgeschlossenen Unterraumes $\mathrm{cl}(\mathrm{span}(U), \|\cdot\|_X)$ liegen, dann gäbe es ein $x' \in X'$ so, dass $\langle x', x\rangle_{X';X} \neq 0$ und $x'|_{\mathrm{cl}(\mathrm{span}(U),\|\cdot\|_X)} \equiv 0$ gelten würde. Einerseits wäre dann $x' \notin U^\perp$, andererseits aber $x'|_U \equiv 0$, was einen Widerspruch darstellt.

„$\supset$" Wegen (i) und (ii) ist diese Inklusion trivial.

Dies beendet den Beweis. □

2.74 Lemma. *Seien X, Y normierte Räume und sei $T \in L(X, Y)$. Dann gilt:*

(i) $(\mathrm{im}(T))^\perp = \ker(T')$.

(ii) $(\mathrm{im}(T'))_\perp = \ker(T)$.

(iii) $\mathrm{cl}(\mathrm{im}(T), \|\cdot\|_Y) = (\ker(T'))_\perp$.

(iv) $\mathrm{cl}(\mathrm{im}(T'), \|\cdot\|_{X'}) = (\ker(T))^\perp$.

Beweis. (i) Für $y' \in Y'$ gilt

$$y'(Tx) = 0 \text{ für alle } x \in X \Leftrightarrow T'y'(x) = 0 \text{ für alle } x \in X \Leftrightarrow T'y' = 0_{X'}.$$

[70] Hans Hahn, 27. September 1879 – 24. Juli 1934.

(ii) Für $x \in X$ gilt

$$Tx = 0_Y \;\Leftrightarrow\; y'(Tx) = 0 \text{ für alle } y' \in Y' \;\Leftrightarrow\; T'y'(x) = 0_{X'} \text{ für alle } y' \in Y'.$$

(iii) Wende $(\cdot)_\perp$ auf (i) an.

(iv) Wende $(\cdot)^\perp$ auf (ii) an.

Dies beendet den Beweis. □

2.75 Korollar. *Seien X, Y normierte Räume. Der Operator $T \in L(X,Y)$ ist genau dann injektiv, wenn $\mathrm{cl}(\mathrm{im}(T'), \|\cdot\|_{X'}) = X'$ gilt.*

2.76 Lemma. *Seien X, Y Banachräume und sei $T \in L(X,Y)$. Der Operator T' ist genau dann nach unten beschränkt, wenn T surjektiv ist.*

Beweis. Wir wollen jeweils das Prinzip der offenen Abbildung nutzen.

„$\Rightarrow$" : Da T' nach unten beschränkt ist, existiert eine Konstante $c > 0$ so, dass $\|T'y'\|_{X'} \geq c\|y'\|_{Y'}$ für alle $y' \in Y'$. Sei $E := \mathrm{cl}(B(0_X, 1), \|\cdot\|_X)$ und sei $F := \mathrm{cl}(T(E), \|\cdot\|_Y)$.

Wir zeigen $\mathrm{cl}(B(0_Y, c), \|\cdot\|_Y) \subset F$. Angenommen, dies wäre falsch. Dann gäbe es $y \in Y$ mit $\|y\|_Y \leq c$ und $y \notin F$. Da F konvex und abgeschlossen ist, existieren $\alpha > 0$, $y' \in Y'$ so, dass $|y'(Tx)| \leq \alpha$ für alle $x \in E$ und $\mathrm{Re}\, y'(y) > \alpha$ gilt. Damit ist $\|y'\|_{Y'} > \frac{\alpha}{c}$, aber

$$\|T'y'\|_{X'} = \sup_{x \in E} |(T'y')(x)| = \sup_{x \in E} |y'(Tx)| \leq \alpha < c\|y'\|_{Y'}, \tag{2.35}$$

was ein Widerspruch ist.

Ferner zeigen wir, dass $B(0_Y, c) \subset T(B(0_X, 3))$ gilt. Sei $U := T(B(0_X, 1))$ und sei $y \in Y$ mit $\|y\|_Y < c$. Nach Obigem existiert ein $y_0 \in U$ mit $\|y - y_0\|_Y \leq \frac{c}{2}$. Aus Homogenitätsgründen existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in \frac{1}{2^n} U$ mit

$$\Big\| y - \sum_{k=0}^{n} y_k \Big\|_Y \leq \tfrac{c}{2^{n+1}}.$$

Wähle ein $x_n \in X$ mit $\|x_n\|_X \leq 2^{-n}$ sowie $Tx_n = y_n$ und setze $x := \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n \in X$. Dann gilt $\|x\|_X \leq 2 < 3$ und $Tx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n = y$.

Also ist T offen und damit surjektiv.

„$\Leftarrow$" : Umgekehrt sei nun T surjektiv. Nach dem Satz über die offene Abbildung ist T offen. Also gibt es ein $c > 0$ so, dass $B(0_Y, c) \subset T(B(0_X, 1))$ gilt. Damit folgt für $y' \in Y'$

$$\begin{aligned}\|T'y'\|_{X'} &= \sup_{\|x\|_X \leq 1} |(T'y'(x))| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} |y'(Tx)| \\ &\geq \sup_{y \in B(0,c)} |y'(y)| = c\|y'\|_{Y'}.\end{aligned}$$

Dies beendet den Beweis. □

2.77 Korollar (Übung). *Seien X, Y, Z Banachräume, $F \in L(X, Z)$ und $G \in L(Y, Z)$, wobei* $\mathrm{im}(G)$ *zusätzlich abgeschlossen sei. Äquivalent sind:*

(i) $\mathrm{im}(F) \subset \mathrm{im}(G)$.

(ii) *Es gibt ein $c > 0$ so, dass*

$$\|F'z'\|_{X'} \leq c\|G'z'\|_{Y'}$$

für alle $z' \in Z'$ gilt.

Mit Satz 2.42, Korollar 2.75, Lemma 2.76 und Korollar 2.77 folgt

2.78 Satz. *Das System (2.8) ist genau dann zur Zeit $T \in I \backslash \{t_0\}$*

(i) *exakt steuerbar, wenn $\mathcal{L}'_T$ nach unten beschränkt, d.h. wenn es ein $c > 0$ so gibt, dass*

$$\int_{t_0}^{T} \|B'(t)(S'(t))^{-1}S'(T)x'\|_{U'}^{q'} \mathrm{d}t \geq c\|x'\|_{X'}^{q'} \text{ für alle } x' \in X' \text{ gilt.}$$

(ii) *approximativ steuerbar, wenn $\mathcal{L}'_T$ injektiv ist, d.h. wenn für $x' \in X'$ aus $B'(t)(S'(t))^{-1}S'(T)x' = 0_{X'}$ für fast alle $t \in [t_0, T]$ bereits $x' = 0_{X'}$ folgt.*

(iii) *exakt Null-steuerbar, wenn $\mathcal{L}'_T$ nach unten durch $S'(T)$ beschränkt ist, d.h. wenn es ein $c > 0$ so gibt, dass*

$$\int_{t_0}^{T} \|B'(t)(S'(t))^{-1}S'(T)x'\|_{U'}^{q'} \mathrm{d}t \geq c\|S'(T)x'\|_{X'}^{q'} \text{ für alle } x' \in X' \text{ gilt.}$$

Ist X reflexiv und sind die Operatorfamilien A und B konstant, so folgt $\mathcal{L}'_{T;A,B} = \mathcal{M}_{T;A',B'}$

2.79 Korollar. *Sei $T \in I \backslash \{t_0\}$. Das System*

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) \text{ für } t \in I, \quad y(t_0) = x \in X$$

ist genau dann zum Zeitpunkt T exakt, approximativ bzw. Null-steuerbar, wenn das duale System

$$\dot{z}(t) = A'z(t) \text{ für } t \in I, \quad z(t_0) = x' \in X', \quad h(t) = B'z(t) \text{ für } t \in I$$

zum Zeitpunkt T exakt, approximativ bzw. terminal beobachtbar ist.

Abschließend wollen wir kurz die auf Lions[71] zurückgehende „Hilbertsche Eindeutigkeitsmethode" (HUM[72]) vorstellen. Hierzu nehmen wir an, dass reelle X, U Hilberträume sind und $p = q = 2$ gilt.

Seien $x_0, x_T \in X$. Wir definieren das Funktional $J\colon X \to \mathbb{R}$ mittels

$$J(x) := \tfrac{1}{2} \int_{t_0}^{T} \|B^*(t)(S^*(t))^{-1}S^*(T)x\|_U^2 \mathrm{d}t - \langle x, x_T \rangle_X + \langle S^*(T)x, x_0 \rangle_X.$$

Offensichtlich ist J stetig, aber nicht linear.

Ist das System (2.8) exakt steuerbar, so folgt mit Satz 2.78, dass J koerziv ist: Denn unter Anwendung der Young[73]schen Ungleichung ergibt sich für gewisse $M, c > 0$

$$\begin{aligned} J(x) &\geq \tfrac{c}{2}\|x\|_X^2 - \|x\|_X \|x_T\|_X - \|S^*(T)x\|_X \|x_0\|_X \\ &\geq \tfrac{c}{4}\|x\|_X^2 - M\|x_T\|_X^2 - M\|x_0\|_X^2, \end{aligned}$$

wobei hier die Beschränktheit von $S^*(T)$ zu beachten ist. Daher besitzt J ein globales Minimum an einer Stelle $\hat{x} \in X$, welches wegen der strikten Konvexität von J sogar eindeutig ist.

Analog zu Satz 2.46 kann man zeigen:

2.80 Satz. *Das System (2.8) sei zum Zeitpunkt $T > 0$ exakt steuerbar. Sei $\hat{u}(t) := -B^*(t)(S^*(t))^{-1}S^*(T)(\mathcal{L}_T\mathcal{L}_T^*)^{-1}(S(T)x_0 - x_T)$. Dann ist $\hat{u} \in \mathcal{U}$ und $\hat{y} := y^{x_0,\hat{u}} \in \mathcal{X}$. Überdies hat $\hat{u}$ die kleinste $L^2(t_0, T; U)$-Norm unter allen Steuerungen, welche das System von x_0 nach x_T zur Zeit T überführen.*

2.3. Stabilität, Stabilisierbarkeit und Endeckbarkeit

Sei X ein Banachraum, $p \in [1, \infty)$, $I := (0, \infty)$ und sei $A \in L^p_{\mathrm{loc}}(I, L(X))$. Wir betrachten das lineare Cauchyproblem

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) \text{ für } t \in I, \quad y(0) = y_0 \tag{2.36}$$

[71] Jacques-Louis Lions, 2. Mai 1928 – 17. Mai 2001.
[72] Hilbert uniqueness method
[73] William Henry Young, 20. Oktober 1863 – 7. Juli 1942.

für ein $y_0 \in X$.

2.81 Definition. Die Nulllösung von (2.36) heißt

(i) *stabil*, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \,\exists \delta > 0 \,\forall y_0 \in X, \|y_0\|_X < \delta : \sup_{t \geq 0} \|y^{y_0}(t)\|_X < \varepsilon.$$

(ii) *asymptotisch stabil*, wenn für alle $y_0 \in X$

$$\|y^{y_0}(t)\|_X \to 0 \text{ für } t \to \infty \text{ gilt.}$$

(iii) *gleichmäßig stabil*, wenn es ein $k \in C^0([0,\infty),[0,\infty))$ so gibt, dass

$$\|y^{y_0}(t)\|_X \leq k(t)\|y_0\|_X \text{ für } t \geq 0 \text{ gilt.}$$

(iv) *exponentiell stabil*, wenn (iii) für $k(t) := ce^{-\alpha t}$, $t \geq 0$, mit gewissen $c, \alpha > 0$ gilt.

Ist X ein Hilbertraum und gilt $p = 2$, so kann man die Symmetrisierung

$$A^{\mathrm{sym}}(t) := \tfrac{1}{2}(A(t) + A^*(t))$$

von A definieren. Für fast alle $t \in I$ ist dann $A^{\mathrm{sym}}(t) \in L(X)$ selbstadjungiert. Die Funktionen

$$\begin{aligned}\lambda^{\mathrm{sym}}_{\min}(t) &:= \inf_{\|x\|_X = 1} \langle A^{\mathrm{sym}}(t)x, x\rangle_X, \\ \lambda^{\mathrm{sym}}_{\max}(t) &:= \sup_{\|x\|_X = 1} \langle A^{\mathrm{sym}}(t)x, x\rangle_X\end{aligned}$$

sind wohldefiniert für alle $t \in I$. Offensichtlich sind $\lambda^{\mathrm{sym}}_{\min}$, $\lambda^{\mathrm{sym}}_{\max}$ messbar und es gilt sogar $\lambda^{\mathrm{sym}}_{\min}, \lambda^{\mathrm{sym}}_{\max} \in L^p_{\mathrm{loc}}(I, \mathbb{R})$.

2.82 Satz. *Für die Lösung $y \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(I, X)$ von (2.36) gilt*

$$\|y_0\|_X \exp\Big(\int_0^t \lambda^{\mathrm{sym}}_{\min}(s)\mathrm{d}s\Big) \leq \|y(t)\|_X \leq \|y_0\|_X \exp\Big(\int_0^t \lambda^{\mathrm{sym}}_{\max}(s)\mathrm{d}s\Big).$$

Beweis. Für $t \in I$, $x \in X$ gilt

$$\lambda^{\mathrm{sym}}_{\min}(t)\|x\|^2_X \leq \langle A^{\mathrm{sym}}(t)x, x\rangle_X \leq \lambda^{\mathrm{sym}}_{\max}(t)\|x\|^2_X.$$

Unter Verwendung von (2.36) folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|y(t)\|^2_X = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle y(t), y(t)\rangle_X = 2\langle A^{\mathrm{sym}}y(t), y(t)\rangle_X$$

und damit

$$\lambda_{\min}^{\mathrm{sym}}(t)\|y(t)\|_X^2 \leq \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|y(t)\|_X^2 \leq \lambda_{\max}^{\mathrm{sym}}(t)\|y(t)\|_X^2,$$

woraus sich mit Gronwall die Behauptung ergibt. □

2.83 Korollar. *Das System (2.36) ist*

(i) *genau dann stabil, wenn* $\limsup\limits_{t\to 0} \int_0^t \lambda_{\max}^{\mathrm{sym}}(s)\mathrm{d}s < \infty$ *gilt.*

(ii) *genau dann asymptotisch stabil, wenn* $\lim\limits_{t\to\infty} \int_0^t \lambda_{\max}^{\mathrm{sym}}(s)\mathrm{d}s = -\infty$ *gilt.*

(iii) *exponentiell stabil, wenn* $\sup\{\lambda_{\max}^{\mathrm{sym}}(t) \,|\, t \geq 0\} < 0$ *gilt.*

2.84 Definition. Ein Funktional $E\colon [0,\infty)\times X \to \mathbb{R}$ heißt *Lyapunov*[74]sches Funktional, wenn die folgenden Bedingungen gelten:

(i) Es ist $E \geq 0$ und $E(t,x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0_X$.

(ii) E ist gleichmäßig bzgl. t stetig in $x = 0_X$.

(iii) Es gibt ein strikt monoton wachsendes $\alpha \in C^0\big([0,\infty),[0,\infty)\big)$ mit $\alpha(0) = 0$ und $\lim\limits_{s\to\infty}\alpha(s) = \infty$ so, dass $E(t,x) \geq \alpha(\|x\|_X)$ für $x \in X$ gleichmäßig bzgl. $t \in [0,\infty)$.

Nimmt man zunächst formal an, dass E hinreichend regulär ist, so gilt für die starke Lösung y von (2.36)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t,y(t)) = \frac{\partial}{\partial t}E(t,y(t)) + \langle \nabla_y E(t,y(t)), A(t)y(t)\rangle_X \text{ für alle } t \in I.$$

Es gilt die folgende Verallgemeinerung[75] des aus dem Endlichdimensionalen bekannten Lyapunovschen Stabilitätssatzes.

2.85 Satz. (i) *Existiert ein Lyapunovsches Funktional E, so ist die Nulllösung von (2.36) stabil.*

[74] Alexander Lyapunov, 6. Juni 1857 – 3. November 1918.

[75] Quelle: Xu, G.Q., Yung, S.P. (2003), Lyapunov stability of abstract nonlinear dynamic system in Banach space, IMA Journal of Mathematical Control and Information, Vol. 20, No. 1, pp. 105–127.

(ii) *Existiert zusätzlich für alle* $y_0 \in B(0_X, \delta)$, $\delta > 0$, *ein streng monoton steigendes* $\gamma \in C^0\big([0,\infty),[0,\infty)\big)$ *mit* $\lim\limits_{s\to\infty}\gamma(s) = \infty$ *und eine Folge* $(t_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \bar{I}$ *mit* $t_0 = 0$, $t_{n+1} > t_n \to \infty$ *für* $n \to \infty$ *so, dass*

$$E(t_{n+1}, y^{y_0}(t_{n+1})) < E(t_n, y^{y_0}(t_n)) - \gamma(\|y^{y_0}(t_n)\|_X) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

gilt, so ist die Nulllösung von (2.36) asymptotisch stabil.

(iii) *Sind* $E(t,\cdot)$ *und* $\|\cdot\|_X^2$ *für alle* $t \geq 0$ *äquivalent und ist Nulllösung von (2.36) asymptotisch stabil, so ist sie exponentiell stabil.*

Um die Nulllösung von (2.36) auf exponentielle Stabilität zu überprüfen, ist es oft geschickt, das Lyapunovfunktional in der Form

$$E(t,x) := \langle B(t)x, x\rangle_X \text{ für } t \in I, x \in X$$

mit einem $B \in W^{1,2}(I, L(X))$ zu suchen. Für die starke Lösung von (2.36) gilt dann

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t,y(t)) = \langle (A^*(t)B(t) + B(t)A(t) + \dot{B}(t))y(t), y(t)\rangle_X.$$

Es reicht für die exponentielle Stabilität von (2.36), wenn $E(t,\cdot)$ für alle $t \geq 0$ zu $\|\cdot\|_X^2$ äquivalent ist und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t,y(t)) \leq -\gamma\|y(t)\|_X^2 \text{ für } t \in I$$

für ein $\gamma > 0$ gilt. Damit folgt:

2.86 Satz. *Existiert zu jeder punktweise gleichmäßig positiv definiten Familie* $C \in L^2(I, L(X))$ *eine punktweise gleichmäßig positiv definite Familie* $B \in W^{1,2}(I, L(X))$ *als Lösung der „Lyapunovschen Gleichung"*

$$\dot{B}(t) + A^*(t)B(t) + B(t)A(t) = -C(t),$$

so ist die Nulllösung von (2.36) exponentiell stabil.

Ist A *konstant, so ist die Nulllösung genau dann exponentiell stabil, wenn es eine positiv definite Lösung* $B \in L(X)$ *zu*

$$A^*B + BA = -\mathrm{id}_X$$

gibt.

Ist die Operatorfamilie A konstant, so ist folgendes Resultat bekannt[76]:

[76] vgl. Liu, Z., Zheng, S. (1999), Semigroups associated with dissipative systems. π Research Notes Math. 398, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.

2.87 Satz. *Die Nulllösung von (2.36) ist genau dann exponentiell (und damit auch asymptotisch) stabil, wenn* $\operatorname{Re}\lambda < 0$ *für alle* $\lambda \in \sigma(A)$ *gilt.*

Als Spezialfall wollen wir ein praktisches Stabilitätskriterium für endlichdimensionale Probleme vorstellen. Bekanntlich ist die Nulllösung von (2.36) zur $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genau dann asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte von A einen negativen Realteil haben. Da es oft praktisch unmöglich ist, die Eigenwerte von A genau zu bestimmen, werden verschiedene Hilfsmittel zur Überprüfung der Stabilitätsbedingung herangezogen, wie z.B. das aus der Analysis 3 bekannte Hurwitz[77]-Kriterium. Ein verwandtes Resultat wird durch den Satz von Routh gegeben.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $p(\lambda) := \det(\lambda \mathrm{I}_{n\times n} - A)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Ferner gelte

$$p(i\mu) = U(\mu) + iV(\mu) \text{ für } \mu \in \mathbb{R},$$

wobei $\deg(U) = n$, $\deg(V) = n-1$, falls n gerade ist, oder $\deg(U) = n-1$, $\deg(V) = n$, falls ungerade ist. Setze $f_1 := U$, $f_2 := V$, falls $\deg(U) = n$, $\deg(V) = n-1$, bzw. $f_1 := V$, $f_2 := U$, falls $\deg(V) = n$, $\deg(U) = n-1$ gilt. Mit $f_3, f_4, \ldots, f_m$ seien die sich unter Anwendung der Polynomdivision auf f_1, f_2 ergebenden Polynome bezeichnet. Dann gilt $\deg f_{k+1} < \deg f_k$, $k = 1, \ldots, m-1$ und es existieren Polynome $\kappa_1, \ldots, \kappa_m$ so, dass

$$f_{k-1} = \kappa_k f_k - f_{k+1}, \quad f_{m-1} = \kappa f_m \text{ gilt.}$$

Überdies stimmt f_m bis auf einen Faktor mit dem größten gemeinsamen Teiler von f_1, f_2 überein.

2.88 Satz (Routh)**.** *Alle Eigenwerte von A haben genau dann einen negativen Realteil, wenn* $m = n+1$ *gilt und die Vorzeichen der Leitkoeffizienten von* $f_1, \ldots, f_{n+1}$ *eine alternierende Folge bilden.*

2.89 Definition. Zu $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}, (\beta_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $\beta_1 \neq 0$ definieren wir die *Routh-Folge* $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mittels

$$\gamma_k := -\tfrac{1}{\beta_1}\det\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_{k+1} \\ \beta_1 & \beta_{k+1} \end{pmatrix} \text{ für } k \in \mathbb{N}. \tag{2.37}$$

Ist $p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$ für $\lambda \in \mathbb{C}$, so setzen wir $a_k := 0$ für $k > n$ und definieren das zu p gehörige *Routh-Array* als eine unendlichdimensionale Matrix, deren erste zwei Zeilen

$$\begin{matrix} 1, & a_2, & a_4, & a_6, & \ldots, \\ a_1, & a_3, & a_5, & a_7, & \ldots \end{matrix} \tag{2.38}$$

lauten und die l-te Zeile, $l > 2$, sich dadurch ergibt, dass man die Routh-Folge basierend auf der $(l-1)$- und $(l-2)$-ten Zeile bildet, bis an der ersten Stelle eine Null auftaucht.

[77] Adolf Hurwitz, 26. März 1859 – 18. November 1919.

2.90 Satz. *Alle Eigenwerte einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ haben genau dann einen negativen Realteil, wenn die ersten $(n+1)$-Elemente der ersten Spalte des Routh-Arrays von $p(\lambda) := \det(\lambda \mathrm{I}_{n\times n} - A)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, positiv sind.*

2.3.1. Stabilisierbarkeit und Steuerbarkeit

Seien X, U Banachräume, $p, q \in [1, \infty)$, $r \in (1, \infty]$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{p}$. Ferner seien $A \in L^p_{\mathrm{loc}}(0, \infty; L(X))$, $B \in L^r_{\mathrm{loc}}(0, \infty; L(U, X))$. Wir betrachten das Problem

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)u(t) \text{ für } t > 0, \quad y(0) = x \in X, \tag{2.39}$$

wobei $\mathcal{X} := W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(0, \infty; X)$ und $\mathcal{U} := L^q_{\mathrm{loc}}(0, \infty; U)$ der Raum der Zustände bzw. Steuerungen ist.

2.91 Definition. Das System (2.39) heißt

(i) *exponentiell „open loop"-stabilisierbar*, wenn $M, \alpha > 0$ so existieren, dass es zu jedem $x \in X$ ein $u \in \mathcal{U}$ so gibt, dass $y^{x,u} \in \mathcal{X}$ und

$$\|y^{x,u}(t)\|_X \leq Me^{-\alpha t}\|x\|_X \text{ für } t \geq 0 \text{ gilt.}$$

(ii) *exponentiell „closed loop"-stabilisierbar*, wenn es ein $K \in L^q_{\mathrm{loc}}(0, \infty; L(X, U))$ so gibt, dass die Nulllösung von

$$\dot{y}(t) = (A(t) + B(t)K(t))y(t) \text{ für } t > 0, \quad y(0) = x \in X$$

exponentiell stabil ist.

(iii) *vollständig „open loop"-stabilisierbar*, wenn zu jedem $\omega \in \mathbb{R}$ ein $M > 0$ so existiert, dass es zu jedem $x \in X$ ein $u \in \mathcal{U}$ so gibt, dass $y^{x,u} \in \mathcal{X}$ und

$$\|y^{x,u}(t)\|_X \leq Me^{\omega t}\|x\|_X \text{ für } t \geq 0 \text{ gilt.}$$

(iv) *vollständig „closed loop"-stabilisierbar*, wenn es zu jedem $\omega \in \mathbb{R}$ ein $M > 0$ und ein $K \in L^q_{\mathrm{loc}}(0, \infty; L(X, U))$ so gibt, dass die Nulllösung von

$$\dot{y}(t) = (A(t) + B(t)K(t))y(t) \text{ für } t > 0, \quad y(0) = x \in X$$

gleichmäßig stabil mit der Stabilitätsrate $k(t) = Me^{\omega t}$, $t \geq 0$, ist.

Offensichtlich gilt:

2.92 Satz. *Ist das System (2.39) exponentiell bzw. vollständig „closed loop"-stabilisierbar, so ist es auch exponentiell bzw. vollständig „open loop"-stabilisierbar.*

2.93 Bemerkung.

(i) Bei konstanten A, C kann auch K konstant gewählt werden.

(ii) Sind X, U Hilberträume, A, C konstant und gilt $p = q = 2$, so folgt mit Satz 2.99, dass auch die Umkehrung von Satz 2.92 richtig ist.

2.94 Satz. *Seien X, U Banachräume und seien $A \in L(X), B \in L(U, X)$ konstant. Ist das System (2.39) vollständig „closed loop"-stabilisierbar, so gibt es ein $T > 0$ so, dass das System zur Zeit T exakt steuerbar ist.*

Beweis. Offensichtlich existieren $N > 0$, $\nu \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\|S(-t)\|_{L(X)} \leq Ne^{\nu t} \text{ für } t \geq 0 \text{ gilt.} \tag{2.40}$$

Sei $\omega < 0$ und seien dazu $K \in L(X, U)$ ein Feedback und $M > 0$ so, dass

$$\|S_K(t)\|_{L(X)} \leq Me^{\omega t} \text{ für } t \geq 0 \text{ gilt,}$$

wobei $S_K(t) := e^{(A+BK)t}$, $t \in \mathbb{R}$. Aufgrund der Darstellung

$$S(t)x = S_K(t)x - \int_0^t S(t-s)BKS_K(s)x\mathrm{d}s \text{ für } t \geq 0, x \in X,$$

gilt für alle $x' \in X'$, $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
\|S'(t)x'\|_{X'} &\leq \|S'_K(t)x'\|_{X'} + \int_0^t \|S'_K(s)K'B'S'(t-s)x'\|_{X'}\mathrm{d}s \\
&\leq Me^{\omega t}\|x'\|_{X'} + \|K\|_{L(X,U)}M\int_0^t e^{\omega s}\|B'S'(s)x'\|_{U'}\mathrm{d}s \\
&\leq Me^{\omega t}\|x'\|_{X'} + \|K\|_{L(X,U)}M\Big(\int_0^t e^{p'\omega s}\mathrm{d}s\Big)^{1/p'}\Big(\int_0^t \|B'S'(s)x'\|_{U'}^p\mathrm{d}s\Big)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Für $x' \in X'$ mit $\|x'\|_{X'} = 1$ gilt $\|S'(-t)S'(t)x'\|_{X'} = 1$ und damit

$$\|S(-t)\|_{L(X)}^{-1} = \|S'(-t)\|_{L(X')}^{-1} \leq \|S'(t)x'\|_{X'} \text{ für } t \geq 0,$$

woraus sich für $x' \in X'$ mit $\|x'\|_{X'} = 1$

$$\|S(-t)\|_{L(X)}^{-1} \leq Me^{\omega t} + \|K\|_{L(X,U)}M\big(\tfrac{1}{p'|\omega|}\big)^{1/p'}\Big(\int_0^t \|B'S'(s)x'\|_{U'}^p\mathrm{d}s\Big)^{1/p} \tag{2.41}$$

ergibt. Angenommen, das System (2.39) wäre zu keinem Zeitpunkt $t > 0$ exakt steuerbar. Dann gäbe es zu jedem $c > 0$ ein $x' \in X'$ mit $\|x'\|_{X'} = 1$ und

$$\int_0^t \|B'S'(s)x'\|_{U'}^p\mathrm{d}s \leq c.$$

Da c beliebig ist, folgt mit (2.41)

$$\|S(-t)\|_{L(X)}^{-1} \leq Me^{\omega t} \text{ für } t > 0.$$

Zusammen mit (2.40) ergibt sich

$$M^{-1}e^{-\omega t} \leq \|S(-t)\|_{L(X)} \leq Ne^{\nu t} \text{ für alle } t > 0.$$

Daraus folgt, dass $\omega \geq -\nu$ gelten muss, weshalb ω nicht frei wählbar und das System nicht vollständig stabilisierbar wäre, was einen Widerspruch zur Voraussetzung darstellt. □

2.95 Bemerkung. Es gilt auch eine „Umkehrung" dieser Aussage: Ist (2.39) exakt Null-steuerbar, so ist es exponentiell stabilisierbar. Vgl. Satz 2.101.

2.3.2. Lineare Regelungsprobleme und Riccati-Gleichungen

In diesem Abschnitt werden wir einen kurzen Einblick in lineare Regelungsprobleme geben, wobei wir uns der Einfachheit halber auf den Hilbertraumfall beschränken werden. Seien also X, U reelle separable Hilberträume und seien $A \in L(X)$, $B \in L(U, X)$.

Für $T \in (0, \infty]$ betrachten wir das Kontrollproblem

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) \text{ für } t \in (0, T), \quad y(0) = x \in X, \tag{2.42}$$

wobei wir $\mathcal{X} := W^{1,2}(0, T; X)$ bzw. $\mathcal{U} := L^2(0, T; U)$ als Raum der zulässigen Zustände bzw. Steuerungen wählen. Für $T < \infty$ sei $I := [0, T]$ oder $I := [0, \infty)$ sonst.

Seien ferner $Q \in L(X)$, $P_0 \in L(X)$, $R \in L(U)$ positiv semidefinit und selbstadjungiert, wobei R zusätzlich stetig invertierbar sei.

2.96 Definition. (i) Ein *lineares Regelungsproblem am endlichen Zeithorizont* $T < \infty$ (auch ein *linear-quadratischer Regler* – LQR – genannt) besteht darin, eine Kontrolle $u \in \mathcal{U}$ so zu wählen, dass das Funktional $J_T \in C^0(X \times \mathcal{U}, \mathbb{R})$ mit

$$J_T(x, u) := \int_0^T \big(\langle Qy(t), y(t)\rangle_X + \langle Ru(t), u(t)\rangle_U\big)\mathrm{d}t + \langle P_0 y(T), y(T)\rangle_X$$

für $y := y^{x,u}$ sein Minimum an der Stelle (x, u) annimmt.

(ii) Beim *linearen Regelungsproblem am unendlichen Zeithorizont* $T = \infty$ geht es darum, das Funktional

$$J(x, u) := \int_0^\infty \big(\langle Qy(t), y(t)\rangle_X + \langle Ru(t), u(t)\rangle_U\big)\mathrm{d}t$$

zu minimieren.

Wie wir im Folgenden sehen werden, kann die optimale Steuerung in der Feedback-Form gewählt werden, was die Bezeichnung „lineare Regelungsprobleme" erklärt. Diese hängen mit der *Ricatti*[78]*-Gleichung*

$$\dot{P}(t) = A^*P(t) + P(t)A + Q - P(t)BR^{-1}B^*P(t) \text{ für } t \in (0, T), \quad P(0) = P_0 \quad (2.43)$$

sowie der *algebraischen Riccati-Gleichung*

$$A^*P + PA + Q - PBR^{-1}B^*P = 0_{L(X)} \quad (2.44)$$

sehr eng zusammen. Dabei sei betont, dass es sich bei (2.43) bzw. (2.44) um ein nichtlineares Cauchyproblem bzw. eine nichtlineare Operatorgleichung handelt.

2.97 Definition. Unter einer (klassischen) Lösung zu (2.43) verstehen wir ein $P \in C^1(I, L(X))$ mit $P(t) = P^*(t)$ für alle $t \in I$, welches die Gleichung (2.43) punktweise erfüllt.

Ein selbstadjungierter Operator $P \in L(X)$ heißt eine Lösung der „algebraischen" Operatorgleichung (2.44), wenn er nach Einsetzen in (2.44) eine wahre Aussage ergibt.

Ohne Beweis zitieren wir:

2.98 Lemma. *Sei $A \in L(X)$ positiv semidefinit. Dann gibt es genau einen positiv semidefiniten Operator $A^{1/2} \in L(X)$ so, dass $(A^{1/2})^2 = A$ gilt. Überdies kommutiert $A^{1/2}$ mit A.*

Es gilt folgender Satz, welcher eine Antwort auf die Lösbarkeitsfrage für das lineare Regelungsproblem am endlichen Zeithorizont bzw. der Ricatti-Gleichung gibt.

2.99 Satz. *Für $T > 0$ gilt:*

(i) *Die Riccati-Gleichung (2.43) besitzt genau eine globale klassische Lösung $P \in C^1([0, \infty), L(X))$ mit $P(t) = P^*(t)$, $P(t) \geq 0$ (d.h. $\langle P(t)x, x\rangle_X \geq 0$ für alle $x \in X$, $t \geq 0$) für alle $t \geq 0$.*

[78] Jacopo Francesco Riccati, 28. Mai 1676 – 15. April 1754.

(ii) *Der Minimalwert des Funktionals* $J_T \colon X \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$,

$$J_T(x,u) = \int_0^T \big(\langle Qy^{x,u}(t), y^{x,u}(t)\rangle_U + \langle Ru(t), u(t)\rangle_X\big)\mathrm{d}t + \langle P_0 y^{x,u}(T), y^{x,u}(T)\rangle_X$$

beim festen $x \in X$ *beträgt* $\langle P(T)x, x\rangle_X$ *und wird für die „closed loop"-Steuerung* $\hat{u}(t) = \hat{K}(t)\hat{y}(t)$, $t \in [0,T]$, *mit dem Feedback*

$$\hat{K}(t) = -R^{-1}B^*P(T-t) \text{ mit } t \in [0,T]$$

angenommen.

Beweis. Die Menge $L_s(X) := \{\widetilde{P} \in L(X) \,|\, \widetilde{P} = \widetilde{P}^*\}$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $L(X)$ und damit ein Banachraum. Wendet man den Satz von Picard & Lindelöf auf das Cauchyproblem (2.43) an, so folgt die Existenz einer lokalen klassischen Lösung $P \in C^1([0,T_0], L_s(X))$ für ein $T_0 \in (0,T]$. Wir zeigen, dass diese Lösung bis $T_0 = T$ existiert.

Zu jedem $x \in X$ ist $\big(t \mapsto \langle P(T_0-t)x, x\rangle_X\big) \in C^1([0,T_0],\mathbb{R})$ und es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle P(T_0-t)x, x\rangle_X &= -\langle P(T_0-t)x, Ax\rangle_X - \langle P(T_0-t)Ax, x\rangle_X - \langle Qx, x\rangle_X \\ &\quad + \langle P(T_0-t)BR^{-1}B^*P(T_0-t)x, x\rangle_X \text{ für } t \in [0,T_0].\end{aligned}$$

Berücksichtigt man nun, dass $y := y^{x,u} \in C^0([0,T_0], X)$ für $u \in C^1([0,T_0], U)$ gilt, so folgt

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle P(T_0-t)y(t), y(t)\rangle_X \\ &\quad = -\langle P(T_0-t)y(t), Ay(t)\rangle_X - \langle P(T_0-t)Ay(t), y(t)\rangle_X - \langle Qy(t), y(t)\rangle_X \\ &\qquad + \langle P(T_0-t)BR^{-1}B^*P(T_0-t)y(t), y(t)\rangle_X \\ &\qquad + \langle P(T_0-t)\dot{y}(t), y(t)\rangle_X + \langle P(T_0-t)y(t), \dot{y}(t)\rangle_X \\ &\quad = -\langle Qy(t), y(t)\rangle_X + \langle P(T_0-t)BR^{-1}B^*P(T_0-t)y(t), y(t)\rangle_X \\ &\qquad + \langle P(T_0-t)Bu(t), y(t)\rangle_X + \langle P(T_0-t)y(t), Bu(t)\rangle_X \\ &\quad = -\langle Qy(t), y(t)\rangle_X + \|R^{1/2}u(t) + R^{-1/2}B^*P(T_0-t)y(t)\|_U^2 \\ &\qquad - \langle Ru(t), u(t)\rangle_U \text{ für } t \in [0,T_0].\end{aligned}$$

Integriert man diese Identität über $[0,T_0]$, so ergibt sich

$$J_{T_0}(x,u) = \langle P(T_0)x, x\rangle_X + \int_0^{T_0} \|R^{1/2}u(t) + R^{-1/2}B^*P(T_0-t)y(t)\|_U^2 \mathrm{d}t. \tag{2.45}$$

Nun folgt wegen (2.45) für alle $u \in L^2(0,T_0;U)$

$$\langle P(T_0)x, x\rangle_X \le J_{T_0}(x,u). \tag{2.46}$$

Die Volterra[79]-Integralgleichung

$$\hat{y}(t) = S(t)x - \int_0^t S(t-s)BR^{-1}B^*P(T_0-s)\hat{y}(s)\mathrm{d}s \text{ für } t \in [0, T_0]$$

besitzt bekanntlich[80] eine eindeutige Lösung $\hat{y} \in C^0([0, T_0], X)$. Wir setzen

$$\hat{u}(t) := -R^{-1}B^*P(T_0-t)\hat{y}(t) \text{ für } t \in [0, T_0]$$

und finden mit (2.45) für $\hat{y} = y^{x,\hat{u}}$

$$J_{T_0}(x, \hat{u}) = \langle P(T_0)x, x\rangle_X,$$

d.h. $\hat{u}$ ist eine optimale Steuerung. Wegen der Nichtnegativität von J_{T_0} folgt insbesondere die positive Semidefinitheit von $P(T_0)$.

Setzt man die Steuerung $u \equiv 0_U$ in (2.46) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle P(T_0)x, x\rangle_X &\leq \int_0^{T_0} \langle QS(t)x, S(t)x\rangle_X \mathrm{d}t + \langle P_0 S(T_0)x, S(T_0)x\rangle_X \\ &= \Big\langle \Big(\int_0^{T_0} S^*(t)QS(t)\mathrm{d}t\Big)x, x\Big\rangle_X + \langle P_0 S(T_0)x, S(T_0)x\rangle_X. \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\|P(\widetilde{T})\|_{L(X)} \leq \int_0^{T_0} \|S^*(t)QS(t)\|_X \mathrm{d}t + \|P_0\|_{L(X)}\|S(\widetilde{T})\|_{L(X)} \text{ für } \widetilde{T} \leq T_0.$$

Angenommen, die lokale klassische Lösung P zu (2.43) würde nicht global in $[0, T_0]$ existieren, dann müsste es ein $\widetilde{T} \in (0, T_0]$ so geben, dass $\|P(t)\|_{L(X)} \to \infty$ für $t \nearrow \widetilde{T}$ gilt, was der obigen Abschätzung widersprechen würde.

Die positive Semindefinitheit von $P(t)$ für alle $t \in [0, T]$ sowie die Optimalität folgen dann mit (2.45). □

Für Regelungsprobleme am unendlichen Zeithorizont gilt folgendes Resultat:

2.100 Satz. *Zu jedem $x \in X$ existiere ein $u^x \in \mathcal{U}$ so, dass $J(x, u^x)$ endlich ist. Dann existiert ein positiv semidefiniter Operator $\widetilde{P} \in L(X)$, welcher Gleichung (2.44) löst sowie $\widetilde{P} \leq P(t)$ (d.h. $\langle \widetilde{P}x, x\rangle_X \leq \langle P(t)x, x\rangle_X$ für alle $x \in X$ und $t \geq 0$) für alle positiv semidefiniten Lösungen P von (2.43) erfüllt.*

Überdies nimmt das Funktional J seinen minimalen Wert bei festem $x \in x$

$$\langle \widetilde{P}x, x\rangle_X$$

[79] Vito Volterra, 3. Mai 1860 – 11. Oktober 1940.
[80] Vgl. Beweis des Satzes von Picard & Lindelöf.

an der Stelle $\widetilde{u}$ an, wobei $\widetilde{y}$ das Cauchyproblem

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + B\widetilde{u}(t) \text{ für } t > 0, \quad y(0) = x \in X$$

löst und $\widetilde{u}$ in der Feedbackform

$$\widetilde{u}(t) := -R^{-1}B^*\widetilde{P}y(t), \quad t \geq 0,$$

gegeben ist.

Beweis. Sei P die zum Anfangswert $P_0 = 0_{L(X)}$ gehörige Lösung der Riccati-Gleichung (2.44). Nach Satz 2.99 (ii) folgt, dass die Funktion $\langle P(\cdot)x, x\rangle_X$ für alle $x \in X$ monoton steigend ist. Überdies gilt

$$|\langle P(t)x, x\rangle_X| = \langle P(t)x, x\rangle_X \leq J(x, u^x) < \infty \text{ für alle } x \in X \text{ und alle } t \geq 0.$$

Daher existiert ein endlicher Grenzwert

$$\lim_{t \nearrow \infty} \langle P(t)x, x\rangle_X.$$

Andererseits gilt mit der Polarisationsformel

$$\langle P(t)x, \xi\rangle_X = \tfrac{1}{4}\big(\langle P(t)(x+\xi), x+\xi\rangle_X - \langle P(t)(x-\xi), x-\xi\rangle_X\big)$$

für alle $x, \xi \in X$. Damit existiert eine Bilinearform $a\colon X \times X \to \mathbb{R}$ mit $\langle P(t)x, \xi\rangle_X \to a(x, \xi)$ für $t \to \infty$ und alle $x, \xi \in X$.

Wendet man den Satz von Banach & Steinhaus[81] auf die Familie $\{\langle P(t)x, \cdot\rangle_X\}_{t\geq 0}$ der stetigen, linearen Funktionale für ein beliebiges, aber festes $x \in X$ und anschließend auf die Operatorfamilie $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ an, so folgt

$$\sup\{\|P(t)\|_{L(X)} \,|\, t \geq 0\} = c < \infty.$$

Mithin

$$|a(x, \xi)| \leq \sup\{\|P(t)\|_{L(X)} \,|\, t \geq 0\} \cdot \|x\|_X \|\xi\|_X \text{ für alle } x, \xi \in X,$$

weshalb a eine stetige Bilinearform ist. Nach dem Lemma von Lax & Milgram existiert genau ein $\widetilde{P} \in L(X)$ derart, dass

$$a(x, \xi) = \langle \widetilde{P}x, \xi\rangle_X \text{ für alle } x, \xi \in X \text{ gilt.}$$

Überdies ist der Operator $\widetilde{P}$ selbstadjungiert und positiv semidefinit, da $a(x, \xi) = a(\xi, x)$ und $a(x, x) \geq 0$ für $x, \xi \in X$ gilt.

[81] Hugo Dionizy Steinhaus, 4. Januar 1887 – 25. Februar 1972.

Ferner zeigen wir, dass $\widetilde{P}$ die algebraische Riccati-Gleichung (2.44) erfüllt. Da X ein separabler Hilbertraum ist, existiert eine orthonormale Basis $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von X. Definiert man für $n, m \in \mathbb{N}$ und $t \geq 0$

$$p_{n,m}(t) := \langle P(t)x_n, x_m\rangle_X \text{ und } \widetilde{p}_{n,m} := \langle \widetilde{P}x_n, x_m\rangle_X,$$

so folgt die Existenz von $(f_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}} \in C^0([0,\infty) \times l^2 \otimes l^2, l^2 \otimes l^2)$ mit

$$f_{n,m}(t,p) := \langle A^*P(t) + P(t)A + Q - P(t)BR^{-1}B^*P(t)x_n, x_m\rangle_X.$$

Ferner gilt

$$\dot{p}_{n,m}(t) = f_{n,p}(t, p(t)) \text{ für } t \geq 0.$$

Da $p(t) \to \widetilde{p}$ in $l^2 \otimes l^2$ für $t \to \infty$ gilt, folgern wir analog zu Analysis 3, dass $f(\widetilde{p}) = 0_{l^2\otimes l^2}$ gelten muss. Aufgrund der Stetigkeit von f folgt schließlich

$$\lim_{t\nearrow\infty} f(p(t)) = f(\widetilde{p}) = 0_{l^2\otimes l^2}$$

und damit

$$A^*\widetilde{P} + \widetilde{P}A + Q - \widetilde{P}BR^{-1}B^*\widetilde{P} = 0_{L(X)}.$$

Daher muss $\widetilde{P}$ der algebraischen Riccati-Gleichung genügen.

Die verbleibenden Aussage folgt analog zum Beweis von Satz 2.99. □

2.3.3. Stabilisierbarkeit und Entdeckbarkeit

Wir betrachten wieder das Kontrollproblem (2.42) im Hilbertraumfall.

2.101 Satz. *Lässt sich das System (2.42) aus jedem Zustand $x \in X$ zu einem Zeitpunkt $T^x > 0$ in die Null überführen, so ist das System exponentiell stabilisierbar.*

Beweis. Zu $x \in X$ sei $u^x \in L^2(0, T^x; U)$ eine Steuerung, welche das System zum Zeitpunkt $T^x > 0$ in den Null-Zustand überführt. Wir setzen u^x zu einer $L^2(0,\infty;U)$-Funktion mittels $u(t) := 0_U$, $t > T^x$, fort. Dann gilt

$$J(x, u^x) := \int_0^\infty \big(\|y^x(t)\|_X^2 + \|u^x(t)\|_U^2\big)\mathrm{d}t < \infty.$$

Damit sind die Voraussetzungen von Satz 2.100 für $Q = \mathrm{id}_{L(X)}$ und $R = \mathrm{id}_{L(U)}$ erfüllt, woraus sich die Existenz eines positiv semidefiniten Operators $\widetilde{P} \in L(X)$ ergibt, für welchen die Feedback-Steuerung $\widetilde{u}(t) = \widetilde{K}\widetilde{y}(t) := -B^*\widetilde{P}\widetilde{y}(t)$, $t \geq 0$, und die zugehörige klassische Lösung $\widetilde{y}$ von

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + B\widetilde{K}y(t) = (A + B\widetilde{K})y(t) \text{ für } t > 0, \quad y(0) = x$$

die Bedingung

$$J(x, \widetilde{u}) = \int_0^\infty \big(\|\widetilde{y}(t)\|_X^2 + \|\widetilde{u}(t)\|_U^2\big)\mathrm{d}t \leq J(x, u^x) < \infty \text{ für alle } x \in X$$

erfüllen. Andererseits gilt aber

$$\widetilde{y}(t) = S_{\widetilde{K}}(t)x := e^{(A+B\widetilde{K})t}x \text{ für } t \geq 0$$

und damit

$$\int_0^\infty \|S_{\widetilde{K}}(t)x\|_X^2 \mathrm{d}t = \int_0^\infty \|\widetilde{y}(t)\|_X^2 \mathrm{d}t < \infty \text{ für alle } x \in X.$$

Nach Korollar 3.82 ist dann das „closed loop”-Systems exponentiell stabil. □

Seien wieder $p, \nu \in [1, \infty)$ und seien X, Y Banachräume. Ferner sei $I := [0, \infty)$ und $A \in L^p_{\mathrm{loc}}(I, L(X))$, $C \in L^\nu_{\mathrm{loc}}(I, L(X, Y))$. Wir betrachten das reduzierte Problem

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) \text{ für } t \in I, \quad y(0) = x, \tag{2.47}$$
$$w(t) = C(t)y(t) \text{ für } t \in I, \tag{2.48}$$

wobei $\mathcal{X} = W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(I, X)$ und $\mathcal{Y} = L^\nu_{\mathrm{loc}}(I, Y)$ der Raum der Zustände bzw. Ausgänge ist.

2.102 Definition. Das System (2.47)–(2.48) heißt

(i) *(stark) entdeckbar*, falls für alle $x \in X$ aus $w^x \equiv 0_Y$ die Konvergenz $y^x(t) \to 0_X$ für $t \to \infty$ folgt.

(ii) *exponentiell entdeckbar*, falls es $\alpha, c > 0$ so gibt, dass für alle $x \in X$ aus $w^x \equiv 0_Y$ die Ungleichung $\|y^x(t)\|_X \leq ce^{-\alpha t}\|x\|_X$ für $t \in I$ folgt.

2.103 Satz (Übung). *Seien X und Y endlichdimensionale Banachräume. Das System (2.47)–(2.48) ist genau dann stark bzw. exponentiell entdeckbar, wenn das duale System*

$$\dot{z}(t) = A'(t)z(t) + C'(t)v(t) \text{ für } t \in I, \quad z(0) = x' \in X'$$

mit $z \in L^p_{\mathrm{loc}}(I, X')$, $v \in L^\nu_{\mathrm{loc}}(I, Y')$ „closed loop”-stabilisierbar bzw. exponentiell „closed loop”-stabilisierbar ist.

3. Kontrolltheorie für unbeschränkte Operatoren

Seien X, U, Y Banachräume, $p, q, \nu \in [1, \infty)$ mit $p \leq q$ und $I := (0, \infty)$. In diesem Kapitel werden wir uns mit Kontrollproblemen der Form

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) \text{ für } t > 0, \quad y(0) = x, \tag{3.1}$$

$$w(t) = Cy(t) \text{ für } t > 0 \tag{3.2}$$

beschäftigen, wobei $\mathcal{X} := W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(I, X)$, $\mathcal{U} := L^q_{\mathrm{loc}}(I, U)$ und $\mathcal{Y} := L^\nu_{\mathrm{loc}}(I, Y)$ die Räume der zulässigen Zustände, Steuerungen bzw. Ausgänge sind. Es seien $A \in L(D(A), X)$, $B \in L(D(B), X)$, $C \in L(D(C), Y)$ Operatoren mit $D(A) \subset X$, $D(B) \subset U$, $D(C) \subset X$.

3.1. Elemente der Halbgruppentheorie

Sei X ein Banachraum und sei $A\colon D(A) \subset X \to X$ ein linearer Operator, wobei $(D(A), \|\cdot\|_{D(A)})$ mit $\|\cdot\|_{D(A)} := \|\cdot\|_X + \|A\cdot\|_X$ ein Unterraum von X ist. Der Ausgangspunkt der Halbgruppentheorie ist das lineare Cauchyproblem

$$\dot{y}(t) = Ay(t) \text{ für } t > 0, \quad y(0) = y_0. \tag{3.3}$$

Sei $t > 0$ uns sei $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton steigend. Zu $n \in \mathbb{N}$ setze $0 =: t^n_0 < t^n_1 < \dots < t^n_{\sigma(n)} =: t$ sowie $h^n_j := t^n_{j+1} - t^n_j$ für $j = 0, \dots, \sigma(n) - 1$. Ferner sei $y^{j,n} := y(t^n_j)$ für $j = 0, \dots, \sigma(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Wendet man das explizite bzw. implizite Eulerverfahren auf Gleichung (3.3) an, so ergeben sich die Iterationsverfahren:

(i) $\frac{y^{j+1,n} - y^{j,n}}{h^n_j} = Ay^{j,n}$ für $j = 0, \dots, \sigma(n) - 1$ bzw.

$$y^{j,n} = (\mathrm{id}_X + h^n_j A)^j y_0 \text{ für } j = 0, \dots, \sigma(n). \tag{3.4}$$

(ii) $\frac{y^{j+1,n} - y^{j,n}}{h^n_j} = Ay^{j+1,n}$ für $j = 0, \dots, \sigma(n) - 1$ bzw.

$$y^j = (\mathrm{id}_X - h^n_j A)^{-j} y_0 \text{ für } j = 0, \dots, \sigma(n). \tag{3.5}$$

In der Regel setzt man $\sigma(n) := n$, $t^n_j := \frac{jt}{n}$, um die Bedingung $\max\limits_{j=0,\dots,\sigma(n)-1} h^n_j \to 0$ für $n \to \infty$ zu erfüllen.

Ist A beschränkt, so führt (3.4) bekanntlich auf die Lösung

$$y(t) = \lim_{n\to\infty} y^{n,n} = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{id}_X + \tfrac{tA}{n})^n y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} y_0,$$

wobei die Reihe lokal gleichmäßig bzgl. t konvergiert.

Eine solche Argumentation ist bei unbeschränkten Operator nicht möglich, weshalb man sich der impliziten Diskretisierung (3.5) bedienen muss. Das Ziel der Halbgruppentheorie ist es, dem „Lösungsausdruck"

$$\lim_{n\to\infty} (\mathrm{id}_X - \tfrac{tA}{n})^{-n}$$

für eine möglichst breite Klasse von Operatoren A Sinn zu geben. Nachstehend zitieren wir wichtige Resultate, welche für kontrolltheoretische Anwendungen besonders nützlich sind.

3.1 Definition. Sei X ein Banachraum.

Eine einparametrige Operatorfamilie $(S(t))_{t\geq 0} \subset L(X)$ heißt eine *Halbgruppe (beschränkter linearer Operatoren auf X)*, falls:

(i) $S(0) = \mathrm{id}_X$,

(ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$ für $t, s \geq 0$.

Die Operatorfamilie $(S(t))_{t\geq 0}$ heißt

- *Gruppe*, falls sie sich zu einer Familie $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ so fortsetzen lässt, dass (ii) für alle $t, s \in \mathbb{R}$ gilt.
- *Kontraktionshalbgruppe*, falls $\|S(t)\|_{L(X)} \leq 1$ für alle $t \geq 0$ gilt.

Die Halbgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$ heißt

- *gleichmäßig stetig*[82], falls
$$\lim_{t\searrow 0} \|S(t) - \mathrm{id}_X\|_{L(X)} = 0 \text{ gilt.}$$
- *stark stetig* (oder *C_0-Halbgruppe*), falls
$$\lim_{t\searrow 0} S(t)x = x \text{ für alle } x \in X \text{ gilt.}$$
- *holomorph in Σ* (oder *holomorph vom Winkel φ*), falls sie sich auf Σ so fortsetzen lässt, dass
$$\lim_{\Sigma\ni t\to 0} S(t)x = x \text{ für alle } x \in X \text{ gilt,}$$
wobei $\Sigma = \{\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \,|\, |\arg(\lambda)| < \varphi\}$ mit $\varphi \in (0, \pi)$.

[82] „Stetigkeit bzgl. der Operatornorm" wäre eine adäquatere Bezeichnung.

3.2 Definition. Sei $(S(t))_{t\geq 0} \subset L(X)$ eine C_0-Halbgruppe auf einem Banachraum X. Der lineare Operator $A\colon D(A) \subset X \to X$ definiert durch

$$Ax := \lim_{t\searrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ für } x \in D(A)$$

mit

$$D(A) := \left\{x \in X \mid \lim_{t\searrow 0} \tfrac{S(t)x-x}{t} \text{ existiert in } X\right\}$$

heißt der *infinitesimale Generator* oder *Erzeuger* der Halbgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$.

Offensichtlich ist A als linearer Operator wohldefiniert.

3.3 Satz. *Der lineare Operator $A\colon D(A) \subset X \to X$ erzeuge eine C_0-Halbgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$. Dann gilt gilt:*

(i) *$S(t)x \in D(A)$ für alle $x \in D(A)$ und $t \geq 0$,*

(ii) *$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax$ für alle $x \in D(A)$ und $t > 0$,*

(iii) *$S(t)x - x = \int_0^t S(s)Ax\mathrm{d}s$ für alle $x \in D(A)$ und $t \geq 0$.*

3.4 Satz. *Ein linearer Operator $A\colon D(A) \subset X \to X$ erzeugt genau dann eine gleichmäßig stetige Halbgruppe, wenn A beschränkt ist.*

Wir definieren die Resolventenabbildung für $\lambda \in \rho(A)$

$$R(\lambda, A) := (\lambda \mathrm{id}_X - A)^{-1}.$$

3.5 Lemma. *Sei $(S(t))_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe. Dann existieren $\omega \in \mathbb{R}$, $M \geq 1$ so, dass*

$$\|S(t)\|_{L(X)} \leq Me^{\omega t} \text{ für } t \geq 0 \text{ gilt.}$$

3.6 Satz (Hille[83] & Yosida[84])**.** *Ein linearer Operator $A\colon D(A) \subset X \to X$ ist genau dann der infinitesimale Generator der C_0-Halbgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$ auf X, wenn:*

(i) *A ist abgeschlossen, $D(A)$ liegt dicht in X,*

(ii) *$(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ und*

$$\|R(\lambda, A)^n\|_{L(X)} \leq \tfrac{M}{(\lambda-\omega)^n} \text{ für alle } \lambda \in (\omega, \infty) \text{ und alle } n \in \mathbb{N}$$

für gewisse $\omega \in \mathbb{R}$, $M \geq 1$.

---

[83] Carl Einar Hille, 28. Juni 1894 – 12. Februar 1980.
[84] Yoshida Kōsaku, 7. Februar 1909 – 20. Juni 1990.

3.7 Bemerkung. Der Operator $A\colon D(A) \subset X \to X$ erzeuge eine C_0-Halbgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$ auf X wie im Satz 3.6. Dann gilt:

(i) $D(A^\infty) := \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} D(A^n)$ liegt dicht in X.

(ii) Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ gilt $\lambda \in \rho(A)$ sowie
$$\|R(\lambda, A)^n\|_{L(X)} \leq \tfrac{M}{(\operatorname{Re}(\lambda-\omega))^n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$
und
$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) x \mathrm{d}t \text{ für alle } x \in X.$$

(iii) Für alle $x \in X$ und $t \geq 0$ gilt
$$S(t)x = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{id}_X - \tfrac{t}{n}A)^{-n} x.$$

3.8 Satz. *Der Operator $A\colon D(A) \subset X \to X$ erzeuge eine C_0-Halbgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$ mit Konstanten $\omega \in \mathbb{R}$, $M \geq 1$ und sei $B \in L(X)$. Dann erzeugt $A + B$ eine C_0-Halbgruppe $(\widetilde{S}(t))_{t\geq 0}$ mit Konstanten $\omega + M\|B\|_{L(X)}$ und M.*

3.9 Definition. Für $x \in X$ heißt die Menge
$$J(x) := \{x' \in X' \,|\, \|x\|_X^2 = \langle x', x\rangle_{X';X} = \|x'\|_{X'}^2\}$$
das *Subdifferential* von x.

Nach dem Satz von Hahn & Banach ist $J(x) \neq \emptyset$. Ist X reflexiv, insbesondere ein Hilbertraum, so besteht $J(x)$ aus genau einem Element.

3.10 Definition. Ein linearer Operator $A\colon D(A) \subset X \to X$ heißt *dissipativ*, falls für jedes $x \in X$ ein $x' \in J(x)$ so existiert, dass
$$\operatorname{Re}\langle x', Ax\rangle_{X';X} \leq 0 \text{ gilt.}$$

Diese Bedingung ist dazu äquivalent, dass
$$\|(\lambda \mathrm{id}_X - A)x\|_X \geq \lambda \|x\|_X \text{ für alle } x \in D(A) \text{ und } \lambda > 0 \text{ gilt.}$$

3.11 Definition. Ein linearer Operator $A\colon D(A) \subset X \to X$ heißt *m-dissipativ*, falls A dissipativ ist und
$$\operatorname{im}(\lambda_0 \mathrm{id}_X - A) = X$$
für ein $\lambda_0 > 0$ gilt.

Für die Anwendungen ist folgendes Resultat wichtig, wobei die Idee darin besteht, den Operator in die Summe aus einem m-dissipativen und einem beschränkten Operator zu zerlegen.

3.12 Satz (Lumer[85] & Phillips[86])**.** *Der lineare Operator $A\colon D(A) \subset X \to X$ erzeugt genau dann eine C_0-Kontraktionshalbgruppe auf X, wenn gilt:*

(i) *$D(A)$ liegt dicht in X.*

(ii) *A ist m-dissipativ (und damit auch abgeschlossen).*

3.13 Satz. *Sei $A\colon D(A) \subset X \to X$ ein linearer, dissipativer, dicht definierter Operator. Dann ist A abschließbar und seine Abschließung ist dissipativ.*

3.14 Satz (Übung)**.** *Der lineare Operator $A\colon D(A) \subset X \to X$ erzeuge eine C_0-Halbgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$ auf X. Existiert ein $t_0 > 0$ so, dass $S(t_0)$ als Operator auf X invertierbar ist, so lässt sich $(S(t))_{t\geq 0}$ zu einer C_0-Gruppe erweitern.*

3.15 Definition. Seien X, Y Banachräume und sei $T \in D(T) \subset X \to Y$ ein dicht definierter linearer Operator.

(i) Der lineare Operator $T'\colon D(T') \subset Y' \to X'$ gegeben durch

$$D(T') := \big\{y' \in Y' \,|\, \exists x' \in X' : \langle y', Tx\rangle_{Y';Y} = \langle x', x\rangle_{X',X} \text{ für alle } x \in D(T)\big\},$$
$$T'y' := x' \text{ für } y' \in D(T')$$

heißt der *Banachraum-adjungierte Operator zu T.*

(ii) Sind X, Y Hilberträume, so heißt der Operator $T^*\colon D(T^*) \subset Y \to X$ gegeben durch

$$D(T^*) := \big\{y \in Y \,|\, \exists x_y \in X : \langle Tx, y\rangle_Y = \langle x, x_y\rangle_X \text{ für alle } x \in D(T)\big\},$$
$$T^*y := x_y \text{ für } y \in D(T^*)$$

der *Hilbertraum-adjungierte Operator zu T.*

(iii) Ist $X = Y$ ein Hilbertraum, so heißt T *selbstadjungiert*, falls $T^* = T$ gilt.

(iv) Ist $X = Y$ ein Hilbertraum, so heißt T *schief-adjungiert*, falls $T^* = -T$ gilt.

Die Operatoren T' und T^* sind wohldefiniert und stets abgeschlossen, wobei allerdings $D(T') = \{0_{Y'}\}$ bzw. $D(T^*) = \{0_Y\}$ möglich ist. Ist X reflexiv und gilt $Y = X$, so ist T' genau dann dicht definiert, wenn T abschließbar ist.

[85] Günter (häufig: Gunter) Lumer, 29. Mai 1929 – Juni 2005.
[86] Ralph Saul Phillips, 23. Juni 1913 – 23. November 1998.

3.16 Satz (Stone[87]). *Sei X ein Hilbertraum. Dann gilt:*

(i) *Ist $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ eine C_0-Gruppe auf X, wobei $S(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ unitär ist, dann existiert ein selbstadjungierter Operator $A\colon D(A) \subset X \to X$ so, dass iA der infinitesimale Erzeuger von $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ ist.*

(ii) *Ist umgekehrt $A\colon D(A) \subset X \to X$ selbstadjungiert, so erzeugt iA eine C_0-Gruppe unitärer Operatoren.*

3.17 Lemma. *Sei X ein Hilbertraum und sei $A\colon D(A) \subset X \to X$ m-dissipativ. Dann ist A^* m-dissipativ und*

$$\big((\lambda_0 \mathrm{id}_X - A)^{-1}\big)^* = \big((\lambda_0 \mathrm{id}_X - A)^*\big)^{-1}$$

gilt für alle $\lambda_0 > 0$.

3.18 Satz (Übung). *Sei $A\colon D(A) \subset X \to X$ ein dicht definierter, linearer Operator. Dann ist A genau dann schief-adjungiert, wenn sowohl A als auch $-A$ m-dissipativ sind.*

3.19 Definition. Sei X ein Banachraum und sei $A\colon D(A) \subset X \to X$ der infinitesimale Erzeuger einer C_0-Halbgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$ auf X. Sei $X^{\odot} := \mathrm{cl}(D(A'), \|\cdot\|_{X'})$. Die Familie $(S^{\odot}(t))_{t\geq 0}$ mit

$$S^{\odot}(t) := S'(t)|_{X^{\odot}} \text{ für } t \geq 0$$

heißt die *Sonnen-duale Halbgruppe zu* $(S(t))_{t\geq 0}$.

3.20 Satz. *Die Familie $(S^{\odot}(t))_{t\geq 0}$ ist eine C_0-Halbgruppe auf $X^{\odot}$ und wird von $A^{\odot}$ mit*

$$\begin{aligned} D(A^{\odot}) &:= \{y' \in D(A') \cap X^{\odot} = D(A') \,|\, A'y' \in X^{\odot}\}, \\ A^{\odot}y' &:= A'y' \text{ für } y' \in D(A^{\odot}) \end{aligned}$$

erzeugt.

3.21 Satz. *Sei X ein reflexiver Banachraum und sei $A\colon D(A) \subset X \to X$ der Erzeuger einer C_0-Halbgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$ auf X. Dann erzeugt A' eine C_0-Halbgruppe $(S_{A'}(t))_{t\geq 0}$ auf X' und es gilt $S_{A'}(t) = S^{\odot}(t) = S'(t)$ für $t \geq 0$.*

Abschließend stellen wir ein Kriterium zur Überprüfung einer C_0-Halbgruppe auf Holomorphie vor.

[87] Marshall Harvey Stone, 8. April 1903 – 9. Januar 1989.

3.22 Satz. *Sei $A\colon D(A) \subset X \to X$ ein linearer Operator. Äquivalent sind:*

(i) *A erzeugt eine holomorphe Halbgruppe auf X vom Winkel $\varphi > 0$.*

(ii) *Es gilt $\mathbb{C}_{>0} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re} z > 0\} \subset \rho(A)$ und*

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{C}_{>0}} \|\lambda R(\lambda, A)\|_{L(X)} < \infty.$$

3.23 Korollar. *Der Operator A erzeugt genau dann eine holomorphe Gruppe, wenn A beschränkt ist.*

Holomorphe Halbgruppen besitzten eine „Glättungseigenschaft", welche wir bereits bei der Wärmeleitungsgleichung im Ganzraum kennen gelernt haben.

3.24 Satz. *Der lineare Operator $A\colon D(A) \subset X \to X$ erzeuge eine beschränkte holomorphe Halbgruppe $(S(t))_{t\in\Sigma}$ auf X. Dann ist $S(t)x \in D(A^n)$ für alle $x \in X$, $t > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und es gilt*

$$\sup_{t>0} \|t^n A^n S(t)\|_{L(X)} < \infty \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

3.2. Extrapolationsmethoden

Sei X ein Banachraum und sei $A\colon D(A) \subset X \to X$ ein dicht definierter, abgeschlossener, linearer Operator mit $\rho(A) \neq \emptyset$.

3.25 Definition. Zu $\beta \in \rho(A)$ sei

$$\|x\|_1 := \|(\beta \mathrm{id}_X - A)x\|_X \text{ für } x \in D(A)$$

sowie

$$\|x\|_{-1} := \|(\beta \mathrm{id}_X - A)^{-1}x\|_X \text{ für } x \in X.$$

Offensichtlich ist $\|\cdot\|_1$ eine Norm auf $D(A)$, welche zur Graphennorm äquivalent ist. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist $X_1 := D(A)$ versehen mit $\|\cdot\|_1$ ein Banachraum und $\beta \mathrm{id}_X - A$ ist ein isometrischer Isomorphismus zwischen X_1 und X. Die Normen $\|\cdot\|_1$ (bzw. $\|\cdot\|_{-1}$) sind für alle $\beta \in \rho(A)$ äquivalent.

3.26 Definition. Der Raum $X_{-1} := \mathrm{cl}(X, \|\cdot\|_{-1})$ heißt „der" *Extrapolationsraum.*

Offensichtlich ist X_{-1} ein Banachraum und es gilt

$$X_1 \hookrightarrow X \hookrightarrow X_{-1},$$

wobei die Einbettungen dicht sind.

Ist X reflexiv, so kann man wegen $\rho(A) = \rho(A')$ analog die Norm

$$\|x'\|_1 := \|(\beta \mathrm{id}_{X'} - A')x'\|_{X'} \text{ für } x' \in D(A')$$

auf $D(A')$ definieren. Dann ist auch $(D(A'), \|\cdot\|_1)$ ein Banachraum.

3.27 Satz. *Sei X ein Banachraum. Es gilt:*

(i) *A lässt sich eindeutig zu einem Operator $A_{-1} \in L(X, X_{-1})$ fortsetzen.*

(ii) *Ist X reflexiv, so sind X_{-1} und $(D(A'))'$ zueinander isomorph.*

Beweis. (i) Der Raum $D(A)$ liegt dicht in X. Ferner gilt für alle $x \in D(A)$

$$\begin{aligned}\|Ax\|_{-1} &= \|(\beta \mathrm{id}_X - A)^{-1}Ax\|_X = \|(\beta \mathrm{id}_X - A)^{-1}(\beta \mathrm{id}_X - A - \beta \mathrm{id}_X)x\|_X \\ &\le \big(1 + |\beta| \|(\beta \mathrm{id}_X - A)^{-1}\|_{L(X)}\big)\|x\|_X.\end{aligned}$$

Daher besitzt A eine eindeutige stetige Fortsetzung auf X, welche zudem linear ist.

(ii) Sei $\beta \in \rho(A)$. Dann ist $\beta \mathrm{id}_X - A$ ein Isomorphismus zwischen $D(A)$ und X. Da sich $(\beta \mathrm{id}_X - A)^{-1}$ analog zu (i) stetig auf X_{-1} fortsetzen lässt, folgt, dass $\beta \mathrm{id}_{X_{-1}} - A_{-1}$ einen Isomorphismus zwischen X und X_{-1} darstellt.

Desweiteren ist A' ein Isomorphismus zwischen $D(A')$ und X'. Nach dem Transpositionsprinzip ist $(A')'$ ein Isomorphismus zwischen X'' und $(D(A'))'$. Da X reflexiv ist, müssen auch X_{-1} und $(D(A'))'$ zueinander isomorph sein.

Dies beendet den Beweis. □

Seien nun V, H Hilberträume mit $V \hookrightarrow H$, wobei die Einbettung dicht sei.

3.28 Definition. Der Raum $V^* := \mathrm{cl}(H, \|\cdot\|_*)$ mit

$$\|\cdot\|_* := \sup_{y \in V \setminus \{0_V\}} \frac{|\langle \cdot, y\rangle_X|}{\|y\|_V}$$

heißt der zum Hilbertraum V bzgl. H duale Raum.

3.29 Satz. *Die Räume V' und V^* sind isomorph.*

3.30 Definition. (V, H, V') heißt Gelfand[88]-Tripel.

[88] Israel Moiseevich Gelfand, 2. September 1913 – 5. Oktober 2009.

Identifiziert man den Raum V' mit V^*, so gilt

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V',$$

wobei die Einbettungen dicht sind.

3.31 Definition. Für $\beta \in \rho(A)$ definieren wir den Hilbertraum

$$X_1^d := \big(D(A^*), \|(\bar{\beta}\mathrm{id}_X - A^*)\cdot\|_X\big).$$

Es gilt

$$\langle A_{-1}x, y\rangle_{X_{-1};X_1^d} = \langle x, A^*y\rangle_X = \langle Ax, y\rangle_X \text{ für alle } x \in D(A), y \in D(A^*).$$

Bei festem $\beta \in \rho(A)$ werden wir oft anstatt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X_{-1};X_1^d}$ auch $\langle\cdot,\cdot\rangle_{(D(A^*)';D(A^*)}$ schreiben.

3.32 Bemerkung (Übung)**.** Ist X ein Hilbertraum, so sind X_{-1} und der bzgl. X zum X_1^d duale Raum zueinander isomorph, d.h. X_{-1} ist isomorph zur Vervollständigung von X bzgl. der Norm

$$\sup_{y \in D(A^*)\backslash\{0_X\}} \frac{|\langle y, x\rangle_X|}{\|(\bar{\beta}\mathrm{id}_X - A^*)y\|_X} \text{ für alle } \beta \in \rho(A).$$

3.33 Bemerkung. Sind X, U, Y Hilberträume und $B \in L(U, X_{-1})$, $C \in L(X_1, Y)$ Operatoren, so kann man deren „Hilbertraum-Adjungierte" als $B \in L(X_1^d, U)$ bzw. $C \in L(Y, X_{-1})$ auffassen.

3.34 Beispiel. Sei X ein Hilbertraum und sei $A\colon D(A) \subset X \to X$ ein selbstadjungierter Operator. Ferner gebe es ein $\beta \in \rho(A)$ so, dass $(\beta\mathrm{id}_X - A)^{-1}$ kompakt ist. Dann gilt:

(i) A ist diagonalisierbar, d.h. es existieren die Eigenfunktionen $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von A und bilden eine orthonormale Basis von X und es gilt

$$D(A) = \{x \in X \mid \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |\langle x, \phi_n\rangle_X|^2 < \infty\},$$
$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, \phi_n\rangle_X \phi_n,$$

wobei λ_n, $n \in \mathbb{N}$, den zu ϕ_n gehörigen Eigenwert bezeichnet.

(ii) Ist $A - \lambda_0 \mathrm{id}_X$ für ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ negativ semidefinit, so erzeugt A eine C_0-Halbgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$ auf X gegeben durch

$$S(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle x, \phi_n \rangle_X \phi_n \text{ für } x \in X.$$

(iii) Ein Element $x \in X$ ist genau dann der Riesz-Repräsentant (bzgl. des Skalarprodukts auf X) eines stetigen, linearen Funktionals $x' \in (D(A^*))' \simeq (D(A))'$, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\beta - \lambda_n|^2} |\langle x, \phi_n \rangle_X|^2 < \infty \text{ gilt.}$$

3.35 Satz. *Sei X reflexiv und sei $A\colon D(A) \subset X \to X$ der infinitesimale Erzeuger einer C_0-Halbgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$ auf X. Dann lässt sich $(S(t))_{t\geq 0}$ eindeutig zu einer C_0-Halbgruppe $(S_{-1}(t))_{t\geq 0}$ auf X_{-1} (genannt Extrapolationshalbgruppe) fortsetzen, welche von A_{-1} erzeugt wird.*

Beweis. Wir zeigen, dass

$$S_{-1}(t) = (\beta \mathrm{id}_{X_{-1}} - A_{-1}) S(t) (\beta \mathrm{id}_{X_{-1}} - A_{-1})^{-1} \text{ für } t \geq 0$$

die gesuchte C_0-Halbgruppe ist.

Da $\beta \mathrm{id}_{X_{-1}} - A_{-1}$ ein (isometrischer) Isomorphismus zwischen X und X_{-1} ist, folgt, dass $S_{-1}(\cdot)x \in C^0([0,\infty), X_{-1})$ für alle $x \in X_{-1}$ gilt. Außerdem rechnet man leicht nach, dass die Familie $(S_{-1}(t))_{t\geq 0}$ die Halbgruppeneigenschaft sowie die Normiertheitsbedingung erfüllt. Auch die Eindeutigkeit von $(S_{-1}(t))_{t\geq 0}$ ist klar, da X dicht in X_{-1} liegt.

Desweiteren gilt für alle $x \in D(A)$

$$\begin{aligned}
\frac{S_{-1}(t)x - x}{t} &= \frac{(\beta \mathrm{id}_{X_{-1}} - A_{-1}) S(t) (\beta \mathrm{id}_{X_{-1}} - A_{-1})^{-1} x - x}{t} \\
&= \frac{(\beta \mathrm{id}_X - A)(S(t)(\beta \mathrm{id}_X - A)^{-1} x - (\beta \mathrm{id}_X - A)^{-1} x)}{t} \\
&\to (\beta \mathrm{id}_X - A) A (\beta \mathrm{id}_X - A)^{-1} x = Ax = A_{-1}x \text{ in } X_{-1}.
\end{aligned}$$

Aus Stetigkeitsgründen muss diese Identität für alle $x \in X$ gelten.

Beachtet man schließlich, dass $\beta \mathrm{id}_{X_{-1}} - A_{-1}$ ein Isomorphismus ist, so folgt, dass $\lim_{t\searrow 0} \frac{S_{-1}(t)x - x}{t}$ genau dann in X_{-1} existiert, wenn $\lim_{t\searrow 0} \frac{S(t)y - y}{t}$ in X für $y = (\beta \mathrm{id}_X - A)^{-1} x$ existiert. Daher ist X der maximale Definitionsbereich des Erzeugers von $(S_{-1}(t))_{t\geq 0}$, wobei Letzterer überdies mit A_{-1} übereinstimmt. □

3.3. Cauchyprobleme

Sei X ein Banachraum und sei $A\colon D(A) \subset X \to X$ ein abgeschlossener, linearer Operator. Wir beginnen diesen Abschnitt mit dem homogenen Cauchyproblem

$$\dot{y}(t) = Ay(t) \text{ für } t > 0, \quad y(0) = x \in X. \tag{3.6}$$

3.36 Definition. (i) Eine Funktion $y \in C^0([0,\infty), X) \cap C^1([0,\infty), X)$ mit $y(t) \in D(A)$ für alle $t > 0$ heißt eine *klassische Lösung* zu (3.6), falls sie Gleichung (3.6) punktweise erfüllt.

(ii) Eine Funktion $y \in C^0([0,\infty), X)$ heißt eine *milde Lösung* von (3.6), falls

$$\int_0^t y(s)\mathrm{d}s \in D(A) \text{ und } A\int_0^t y(s)\mathrm{d}s = y(t) - x \text{ für } t \geq 0 \text{ gilt.} \tag{3.7}$$

Da A abgeschlossen ist, folgt mit Satz 2.18, dass jede klassische Lösung von (3.6) auch eine milde Lösung ist. Es gilt sogar:

3.37 Satz. *Eine milde Lösung y von (3.6) ist genau dann eine klassische Lösung, wenn $y \in C^1([0,\infty), X)$ gilt.*

Es folgt insbesondere, dass jede klassische Lösung y sogar $y \in C^1([0,\infty), X) \cap C^0([0,\infty), D(A))$ erfüllen muss, während milde Lösungen von (3.6) im Banachraum $C^1([0,\infty), X_{-1}) \cap C^0([0,\infty), X)$ liegen, weshalb man die milde Lösung als klassische Lösung auf X_{-1} auffassen kann.

3.38 Satz. *Äquivalent sind:*

(i) *Zu jedem $x \in X$ existiert eine eindeutige milde Lösung von (3.6).*

(ii) *Der Operator A erzeugt eine C_0-Halbgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$ auf X.*

(iii) *$\rho(A) \neq \emptyset$ und zu jedem $x \in D(A)$ existiert eine eindeutige klassische Lösung von (3.6).*

Die milde bzw. klassische Lösung ist in diesem Fall durch $y(t) = S(t)x$, $t \geq 0$, gegeben und hängt stetig bzgl. der gewichteten Norm $y \mapsto \|e^{-\omega \cdot} y\|_{C_b^0([0,\infty),X)}$ (mit $\omega \in \mathbb{R}$ wie in Satz 3.6) von x ab.

3.39 Korollar. *Das Problem (3.6) ist genau dann im Sinne von Hadamard*[89] *klassisch bzw. mild wohlgestellt, wenn A eine C_0-Halbgruppe auf X erzeugt und $x \in D(A)$ bzw. $x \in X$ gilt.*

[89]Jacques Salomon Hadamard, 8. Dezember 1865 – 17. Oktober 1963 in Paris.

Nun betrachten wir das inhomogene Cauchyproblem

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + f(t) \text{ für } t > 0, \quad y(0) = x, \tag{3.8}$$

wobei zunächst $x \in X_{-1}$, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty), X_{-1})$ seien.

3.40 Definition. (i) Eine Funktion $y \in C^0([0,\infty), X) \cap C^1([0,\infty), X)$ mit $y(t) \in D(A)$ für alle $t > 0$ heißt eine *klassische Lösung* zu (3.8), falls sie Gleichung (3.8) punktweise erfüllt.

(ii) Sei $p \in [1,\infty)$. Eine Funktion $y \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(0,\infty;X) \cap L^p_{\mathrm{loc}}(0,\infty;D(A))$ heißt eine *starke Lösung* zu (3.8), falls sie die Differentialgleichung im schwachen Sinne und die Anfangsbedingung im Sinne des Sobolevschen Einbettungssatzes erfüllt.

(iii) Eine Funktion $y \in C^0([0,\infty), X)$ heißt eine *milde Lösung* von (3.6), falls $\int_0^t y(s)\mathrm{d}s \in D(A)$ gilt und y die Integralgleichung

$$y(t) = x + A\int_0^t y(s)\mathrm{d}s + \int_0^t f(s)\mathrm{d}s \text{ für } t \geq 0 \text{ erfüllt.} \tag{3.9}$$

(iv) Sei $p \in [1,\infty)$. Eine Funktion $y \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(0,\infty;X_{-1}) \cap L^p_{\mathrm{loc}}(0,\infty;X)$ heißt eine *schwache Lösung* oder eine *extrapolierte Lösung*, wenn sie eine starke Lösung auf X_{-1} ist.

3.41 Bemerkung. Ist X ein Hilbertraum, so kann man die schwache Lösung alternativ als ein Element y von $L^p_{\mathrm{loc}}(0,\infty;X) \cap C^0([0,\infty), X_{-1})$ definieren, für welches

$$\langle y(t) - x, \varphi\rangle_{D(A^*)';D(A^*)} = \int_0^t \big(\langle y(s), A^*\varphi\rangle_{D(A^*)';D(A^*)} + \langle f(s), \varphi\rangle_{D(A^*)';D(A^*)}\big)\mathrm{d}s$$

für alle $\varphi \in D(A^*)$ gilt.

Wie früher, muss jede milde Lösung in $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(0,\infty;X_{-1})$ liegen.

3.42 Satz. *Sei $f \in C^0([0,\infty), X)$. Eine milde Lösung y von (3.8) ist genau dann eine klassische Lösung, wenn $y \in C^1([0,\infty), X)$ gilt.*

3.43 Satz. *Seien $x \in X$, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(0,\infty;X)$. Der Operator A erzeuge eine C_0-Halbgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$ auf X. Dann lässt sich die eindeutige milde Lösung des Cauchyproblems (3.8) über die Duhamelsche Formel*

$$y(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(s)\mathrm{d}s \textit{ für } t \geq 0$$

bestimmen.

3.44 Korollar. *Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 3.43 gelte noch* $x \in D(A)$, $f \in W^{1,1}_{\text{loc}}(0,\infty;X)$ *oder* $f \in C^0([0,\infty),D(A))$. *Dann stellt die milde Lösung sogar eine klassische Lösung dar.*

3.45 Bemerkung. Im Gegensatz zu der aus der Analysis III bekannten Situation, d.h. $A \in L(X)$, reicht die Bedingung $f \in C^0([0,\infty),X)$ für die Existenz einer klassischen Lösung im Allgemeinen nicht aus. Erzeugt $A\colon D(A) \subset X \to X$ eine C_0-Halbgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$ auf X und gibt es ein $x \in X$ so, dass $S(t)x \notin D(A)$ für alle $t \geq 0$ gilt, so stellt $y(t) = tS(t)x$ die eindeutige milde Lösung von

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + f(t) \text{ für } t > 0, \quad y(0) = 0_X \in D(A)$$

mit $f \in C^0([0,\infty),X)$, $f(t) := S(t)x$, $t \geq 0$, dar, welche allerdings keine klassische Lösung sein kann, da $y(t) \notin D(A)$ für alle $t > 0$ gilt.

3.46 Korollar. *Seien* $x \in D(A)$, $f \in W^{1,1}_{\text{loc}}(0,\infty;X)$ *oder* $f \in L^p_{\text{loc}}(0,\infty;D(A))$. *Der Operator* A *erzeuge eine* C_0*-Halbgruppe* $(S(t))_{t\geq 0}$ *auf* X. *Dann liefert die Duhamelsche Formel die eindeutige starke Lösung zum Cauchyproblem (3.8). Insbesondere ist jede klassische Lösung auch starke Lösung.*

3.47 Bemerkung. Ist X reflexiv, so ist die Existenz einer eindeutigen starken Lösung bereits gesichert, wenn $f \in \text{Lip}_{\text{loc}}(0,\infty;X)$ gilt.

3.48 Korollar. *Seien* $x \in X$, $f \in W^{1,1}_{\text{loc}}(0,\infty;X_{-1})$ *oder* $f \in L^p_{\text{loc}}(0,\infty;X)$. *Der Operator* A *erzeuge eine* C_0*-Halbgruppe* $(S(t))_{t\geq 0}$ *auf* X. *Dann stellt die Funktion*

$$y(t) = S_{-1}(t)x + \int_0^t S_{-1}(t-s)f(s)\mathrm{d}s \textit{ für } t \geq 0$$

die eindeutige schwache Lösung des Cauchyproblems (3.8) dar.

3.49 Bemerkung. Ist X ein Banachraum von $\mathcal{HT}$[90]- bzw. UMD[91]-Typ und verfügt der Operator A über maximale L^p-Regularität (welche im Hilbertraum dazu äquivalent ist, dass A eine holomorphe Halbgruppe auf X erzeugt), so lässt sich zeigen: Das Cauchyproblem (3.8) besitzt genau dann eine starke bzw. schwache Lösung, wenn $x \in (D(A),X)_{1/p,p}$, $f \in L^p_{\text{loc}}(0,\infty;X)$ bzw. $x \in (X_{-1},X)_{1/p,p}$, $f \in L^p_{\text{loc}}(0,\infty;X_{-1})$ gilt. Mit $(\cdot,\cdot)_{\alpha,p}$ wird hierbei der reelle Interpolationsfunktor bezeichnet.

So folgt insbesondere, dass die Wärmeleitungsgleichung mit homogenen Dirichlet[92]-Randbedingungen auf $L^2(\Omega)$ eine starke Lösung besitzt, falls das Anfangswert in

[90] Ein Banachraum X ist von $\mathcal{HT}$-Typ, wenn die Hilberttransformation auf X stetig ist.
[91] Unconditional martingale differences.
[92] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 13. Februar 1805 – 5. Mai 1859.

$H_0^1(\Omega)$ und die rechte Seite in $L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;L^2(\Omega))$ liegt, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet ist. Für die Wellengleichung etc. gibt es dagegen kein vergleichbares Resultat.

3.50 Satz. *Der lineare Operator $A\colon D(A) \subset X \to X$ erzeuge eine holomorphe Halbgruppe auf X. Desweiteren seien $x \in D(A)$, $f \in C^{0,\alpha}([0,\infty),X)$ für ein $\alpha > 0$. Dann besitzt (3.8) eine eindeutige klassische Lösung.*

3.3.1. Anwendungsbeispiele

Sei im Folgenden $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet und seien Γ_0, Γ_1 relativ offen in Ω mit $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 \neq \emptyset$. Mit $\nu(x)$ sei der äußere Einheitsnormalenvektor an Ω im Punkt x auf dem stückweise glatten Rand $\partial\Omega$ bezeichnet.

Wir betrachten den Sobolevraum

$$H^1_{\Gamma_0}(\Omega) := \mathrm{cl}\big(\{y \in C^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega) \,|\, \mathrm{supp}(y) \cap \Gamma_0 = \emptyset\}, \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}\big).$$

Analog zum Fall $\partial\Omega = \Gamma_0$ gilt

$$\begin{aligned} H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \{y \in H^1(\Omega) \,|\, &\langle y, \mathrm{div} F\rangle_{L^2(\Omega)} = -\langle \nabla y, F\rangle_{(L^2(\Omega))^d} \\ &\text{für alle } F \in (L^2(\Omega))^d \text{ mit } \mathrm{supp}(F) \cap \Gamma_1 = \emptyset \text{ und} \\ &\mathrm{div}\, F \in L^2(\Omega)\}. \end{aligned}$$

3.51 Beispiel (Wärmeleitungsgleichung)**.** Seien $a \in \mathbb{R}^{d\times d}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix und $c \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} y_t &= \mathrm{div}(a\nabla y) + cy \text{ in } (0,\infty)\times\Omega, \\ y &= 0 \text{ auf } (0,\infty)\times\Gamma_0, \\ \nu(a\nabla y) &= 0 \text{ auf } (0,\infty)\times\Gamma_1, \\ y(0,\cdot) &= y_0 \text{ in } \Omega. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Sei $X := L^2(\Omega)$ mit dem Standardskalarprodukt versehen. Wir definieren den Operator

$$A_0\colon D(A_0) \subset X \to X, \quad y \mapsto \mathrm{div}(a\nabla y),$$

wobei

$$\begin{aligned} D(A_0) := \{y \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \,|\, &\mathrm{div}(a\nabla y) \in L^2(\Omega) \text{ und} \\ &\langle \mathrm{div}(a\nabla y), \varphi\rangle_{L^2(\Omega)} = -\langle a\nabla y, \nabla\varphi\rangle_{(L^2(\Omega))^d} \\ &\text{für alle } \varphi \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\}. \end{aligned}$$

Die abstrakte Formulierung von Gleichung (3.10) lautet damit

$$y_t(t) = A_0 y(t) + cy(t) \text{ für } t > 0, \quad y(0) = y_0. \tag{3.11}$$

Offensichtlich ist A_0 linear und abgeschlossen. Wegen

$$\operatorname{cl}(D(A_0), \|\cdot\|_X) = \operatorname{cl}(C_0^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}) = L^2(\Omega) = X$$

ist A_0 dicht definiert. Desweiteren ist A_0 wegen

$$\langle A_0 y, y\rangle = -\|a\nabla y\| \leq 0 \text{ für alle } y \in D(A_0)$$

dissipativ. Mit Lax & Milgram folgt $(0,\infty) \subset \rho(A_0)$ (oder sogar $[0,\infty) \subset \rho(A_0)$ und damit $(-\varepsilon,\infty) \subset \rho(A_0)$ für ein $\varepsilon > 0$, falls $\Gamma_0 \neq \emptyset$). Also ist A_0 m-dissipativ.

Damit erzeugt A_0 eine C_0-Kontraktionshalbgruppe auf X. Da es sich bei $c\,\mathrm{id}_X$ um einen linearen beschränkten Operator auf X handelt, erzeugt auch der gestörte Operator $A_0 + c\,\mathrm{id}_X$ eine C_0-Halbgruppe auf X. Daraus folgt, dass das abstrakte Cauchyproblem (3.11) eine eindeutige klassische Lösung besitzt, falls $y_0 \in D(A_0)$ gilt.

Ist $c \leq 0$, so kann man leicht zeigen, dass die von $A_0 + c\,\mathrm{id}_X$ erzeugte Halbgruppe im (maximalen) Sektor $\Sigma := \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ holomorph und beschränkt sowie exponentiell stabil ist. Ist $\partial\Omega$ glatt genug, z.B. $\partial\Omega \in C^2$, so gilt $D(A_0) \subset H^2(\Omega)$. Überdies sind die Normen $\|\cdot\|_{D(A_0)}$ und $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$ äquivalent.

3.52 Beispiel (Wellengleichung)**.** Seien $a \in \mathbb{R}^{d\times d}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix, $b \in \mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Wellengleichung

$$\begin{aligned} y_{tt} &= \operatorname{div}(a\nabla y) + b\cdot\nabla y + cy \text{ in } (0,\infty)\times\Omega, \\ y &= 0 \text{ auf } (0,\infty)\times\Gamma_0, \\ \nu(a\nabla y) &= 0 \text{ auf } (0,\infty)\times\Gamma_1, \\ y(0,\cdot) &= y_0 \text{ in } \Omega, \\ y_t(0,\cdot) &= y_1 \text{ in } \Omega. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Gleichung (3.12) lässt sich auf (mindestens) drei Weisen auf ein System erster Ordnung transformieren, wobei alle Zugänge im Wesentlichen äquivalent sind.

(i) Sei $\mathcal{X} := H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Setzt man $V := (y, y_t)$, so folgt

$$V_t = \mathcal{A}V, \quad V(0) = V_0,$$

wobei $V_0 := (y_0, y_1)$ und

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_r \equiv \begin{pmatrix} 0_{L(H^1_{\Gamma_0}(\Omega))} & \mathrm{id}_{L^2(\Omega)} \\ A_0 & 0_{L(L^2(\Omega))} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{L(H^1_{\Gamma_0}(\Omega))} & 0_{L(L^2(\Omega))} \\ b\cdot\nabla + c & 0_{L(L^2(\Omega))} \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}) := \{V \in \mathcal{X} \,|\, \mathcal{A}V \in \mathcal{X}\} &= \{V \in \mathcal{X} \,|\, V_1 \in D(A_0), V_2 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\} \\ &= \{V \in \mathcal{X} \,|\, \mathcal{A}_0 V \in \mathcal{X}\} =: D(\mathcal{A}_0). \end{aligned}$$

und A_0 wie im Beispiel 3.51. Analog zeigt man, dass $\mathcal{A}_0$ (sowie $-\mathcal{A}_0$) ein linearer, dicht definierter, abgeschlossener Operator ist, welcher zudem m-dissipativ ist. Dabei folgt die Dichtheit von $D(\mathcal{A}_0)$ in $\mathcal{X}$ aus der Tatsache

$$\begin{aligned}\mathrm{cl}(D(A_0), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}) &= \mathrm{cl}\big(\{y \in C^2(\bar{\Omega}) \,|\, y|_{\Gamma_0} = 0, \nu(a\nabla y)|_{\Gamma_1} = 0\}, \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}\big\} \\ &= H^1_{\Gamma_0}(\Omega),\end{aligned}$$

falls $\partial\Omega \in C^2$ gilt. Deshalb erzeugt $\mathcal{A}_0$ eine C_0-Kontraktionsgruppe auf $\mathcal{X}$. Da $\mathcal{A}_r \in L(\mathcal{X})$ gilt, erzeugt $\mathcal{A}$ eine C_0-Gruppe auf X.

Sind $y_0 \in D(A_0)$, $y_1 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$, so besitzt Gleichung (3.12) eine eindeutige klassische Lösung.

(ii) Sei $c = 0$ und sei $\mathcal{X} := (L^2(\Omega))^d \times L^2(\Omega)$. Setzt man $V := (\sqrt{a}\nabla y, y_t)$, so folgt

$$V_t(t) = \mathcal{A}V(t) \text{ für } t > 0, \quad V(0) = V_0,$$

wobei $V_0 := (\sqrt{a}\nabla y_0, y_1)$ und

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_r \equiv \begin{pmatrix} 0_{L((L^2(\Omega))^d)} & \sqrt{a}\nabla \\ \mathrm{div}(\sqrt{a}\cdot) & 0_{L(L^2(\Omega))} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{L((L^2(\Omega))^d)} & 0_{L(L^2(\Omega))} \\ b\cdot(\sqrt{a})^{-1} & 0_{L(L^2(\Omega))} \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned}D(\mathcal{A}) := \{V \in \mathcal{X} \,|\, &\mathrm{div}\,(\sqrt{a}V_1) \in L^2(\Omega), V_2 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \text{ mit} \\ &\langle \mathrm{div}\,(\sqrt{a}V_1), f\rangle_{L^2(\Omega)} = -\langle \sqrt{a}V_1, \nabla f\rangle_{(L^2(\Omega))^d} \\ &\text{für alle } f \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\}\end{aligned}$$

Wegen

$$\mathrm{cl}(D(\mathcal{A}), \|\cdot\|_{\mathcal{X}}) = \mathrm{cl}((C_0^\infty(\Omega))^d \times C_0^\infty(\Omega), \|\cdot\|_X) = \mathcal{X}$$

sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}_0$ dicht definiert. Ferner ist $\mathcal{A}_0$ schief-adjungiert und erzeugt deshalb eine C_0-Kontraktionsgruppe. Unter Beachtung von $\mathcal{A}_r \in L(\mathcal{X})$ folgt, dass $\mathcal{A}$ eine C_0-Gruppe auf $\mathcal{X}$ erzeugt.

Gilt also $(\sqrt{a}\nabla y_0, y_1) \in D(\mathcal{A}_0)$, so besitzt Gleichung (3.12) eine eindeutige klassische Lösung.

(iii) Sei $\Gamma_0 \neq \emptyset$. Da $-A_0$ positiv definit und stetig invertierbar ist, kann man die Wurzel aus $(-A_0)^{-1}$ definieren, d.h. $(-A_0)^{-1/2} := ((-A_0)^{-1})^{1/2} \in L(X)$. Desweiteren sei $D((-A_0)^{1/2}) := \mathrm{im}(-A_0)^{-1/2}$. Versieht man nun $D((-A_0)^{1/2})$ mit dem Skalarprodukt $\langle -A_0\cdot, \cdot\rangle_X$, so wird $D((-A_0)^{1/2})$ zum Hilbertraum. Ferner ist

$$(-A_0)^{1/2} := ((-A_0)^{-1/2})^{-1} \in L(D((-A_0)^{1/2}), X).$$

Definiert dann $V := ((-A_0)^{1/2}y, y_t)$, so ergibt sich analog zu (ii) die abstrakte Formulierung von (3.12) auf $\mathcal{X} := X \times X$ in der Form

$$V_t(t) = \mathcal{A}V(t) \text{ für } t > 0, \quad V(0) = V_0$$

mit $V_0 := ((-A_0)^{1/2} y_0, y_1)$ und

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_r \equiv \begin{pmatrix} 0_{L(X)} & (-A_0)^{1/2} \\ (-A_0)^{1/2} & 0_{L(X)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{L(X)} & 0_{L(X)} \\ (b \cdot \nabla + c)(-A_0)^{-1/2} & 0_{L(X)} \end{pmatrix}$$

sowie $D(\mathcal{A}) = D(A_0) \times D((-A_0)^{1/2})$. Auch $\mathcal{A}$ erzeugt eine C_0-Gruppe auf $\mathcal{X}$, was wiederum die eindeutige klassische Lösbarkeit von (3.12) liefert, falls $y_0 \in D(A_0)$, $y_1 \in D((-A_0)^{1/2})$ gilt.

3.53 Beispiel (Schrödinger[93]gleichung)**.** Sei $\hbar$ die reduzierte Planck[94]sche Konstante. Die Schrödingergleichung für die Wellenfunktion y eines Punktteilchens der Masse $m > 0$ im Nullpotential lautet

$$y_t = i\tfrac{\hbar}{2m} \triangle y \text{ in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^d, \quad y(0, \cdot) = y_0. \tag{3.13}$$

Für $X := L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ betrachten wir den linearen Operator

$$\widetilde{A} \colon D(\widetilde{A}) \subset X \to X, \quad y \mapsto \triangle y$$

mit $D(\widetilde{A}) := \{y \in X \,|\, \widetilde{A}y \in X\}$. Unter Beachtung der Eigenschaften der Fouriertransformation folgt, dass $D(\widetilde{A})$ zu $H^2(\Omega)$ isomorph ist, da

$$\|y\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\triangle y\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|(1 + |\cdot|^2)\mathcal{F}y\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \simeq \sum_{|\alpha| \leq 2} \|(\cdot)^\alpha \mathcal{F}y\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|y\|^2_{H^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Damit ist $\widetilde{A}$ abgeschlossen. Außerdem wissen wir, dass $\widetilde{A}$ dicht definiert ist, da $C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset H^2(\mathbb{R}^d)$ dicht in X liegt.

Offensichtlich ist $\widetilde{A}$ symmetrisch. Ferner gilt $\pm i \in \rho(\widetilde{A})$, da sich mit der Plancherel[95]-Gleichung

$$\|(\pm i - \widetilde{A})^{-1}\|_{L(X)} = \|\mathcal{F}^{-1}\Big(\tfrac{1}{\pm i + |\cdot|^2}\Big)\mathcal{F}\|_{L(X)} \leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \tfrac{1}{|\pm i + |\xi|^2|} = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \tfrac{1}{\sqrt{|\xi|^4 + 1}} = 1$$

ergibt. Also ist $\widetilde{A}$ selbstadjungiert. Nach dem Satz von Stone erzeugt der Operator $A := i\frac{\hbar}{2m}\widetilde{A}$ eine C_0-Gruppe unitärer Operatoren, über welche sich dann die klassische Lösung der abstrakten Formulierung

$$y_t(t) = Ay(t) \text{ für } t > 0, \quad y(0) = y_0$$

der Schrödingergleichung (3.13) ergeben, falls $y_0 \in H^2(\mathbb{R}^d)$ gilt.

[93] Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger, 12. August 1887 – 4. Januar 1961.
[94] Max Karl Ernst Ludwig Planck, 23. April 1858 – 4. Oktober 1947.
[95] Michel Plancherel, 16. Januar 1885 – 4. März 1967.

3.4. Kontrollsysteme als Cauchyprobleme

Wir wollen Kontrollsysteme als Cauchyprobleme interpretieren und die Regularität ihrer Lösungen diskutieren. Der Einfachheit halber werden wir uns dabei auf den Hilbertraumfall beschränken. Es sei aber angemerkt, dass sich die nachstehend vorgestellten Resultate auch für reflexive Banachräume verallgemeinern lassen.

Seien X, U, Y Hilberträume. Ferner erzeuge der lineare Operator $A\colon D(A) \subset X \to X$ eine C_0-Gruppe $(S(t))_{t\geq 0}$ auf X. Seien $X_1 := (D(A), \|(\beta \mathrm{id}_X - A)\cdot\|_X)$ und $X_{-1} := \mathrm{cl}(X, \|(\beta \mathrm{id}_X - A)^{-1}\cdot\|_X)$ für ein $\beta \in \rho(A)$. Wir wissen, dass sich dann A zu einem Operator $A_{-1} \in L(X, X_{-1})$ fortsetzen lässt, wobei A_{-1} die C_0-Halbgruppe $(S_{-1}(t))_{t\geq 0}$ auf X_{-1} erzeugt, für welche $S_{-1}(t)|_X = S(t)$ für $t \geq 0$ gilt.

Desweiteren seien $B \in L(U, X_{-1})$ und $C \in L(X_1, Y)$. Wir betrachten folgende Kontrollsysteme:

(i) Steuerungssystem:

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) \text{ für } t > 0, \quad y(0) = x \in X, \tag{3.14}$$

wobei wir $\mathcal{U} := L^2_{\mathrm{loc}}(0, \infty; U)$ als Raum der zulässigen Steuerungen wählen.

(ii) Beobachtungssystem:

$$\dot{z}(t) = Az(t) \text{ für } t > 0, \quad w(t) = Cz(t) \text{ für } t > 0, \quad z(0) = x \in X_1. \tag{3.15}$$

Wir wollen die Regularität der Lösungen von (3.14) und (3.15) untersuchen. Nach Kapitel 3.3 existiert zu jedem $u \in \mathcal{U}$ eine eindeutige milde Lösung

$$y \in H^1_{\mathrm{loc}}(0, \infty; X_{-1})$$

auf X_{-1} zu (3.14) gegeben durch

$$y(t) = S_{-1}(t)x + \int_0^t S_{-1}(t-s)Bu(s)\mathrm{d}s \text{ für } t \geq 0. \tag{3.16}$$

Für (3.15) folgt analog die Existenz der klassischen Lösung

$$z \in C^1([0, \infty), X) \cap C^0([0, \infty), X_1)$$

sowie

$$w \in C^0([0, \infty), Y).$$

Es tritt also bei (3.14) im Allgemeinen ein Regularitätsverlust auf, da die Lösung y den Raum X verlassen kann, obwohl $y(0) = x \in X$ gilt. Wir wollen im Folgenden die Operatoren B charakterisieren, für welche die Funktion y ihre Werte in X annimmt.

3.54 Definition. Der Steuerungsoperator $B \in L(U, X_{-1})$ heißt

(i) *beschränkt*, falls $B \in L(U, X)$ gilt.

(ii) *zum Zeitpunkt $T > 0$ zulässig*, falls die in (3.16) gegebene milde Lösung $y(t) \in X$ für fast alle $t \in [0, T]$ und alle $x \in X$ erfüllt.

(iii) *zulässig*, falls er für ein $T > 0$ zulässig ist.

Offensichtlich ist jeder beschränkte Steuerungsoperator zulässig. Desweiteren ist die Zulässigkeit zur Zeit $T > 0$ dazu äquivalent, dass $y \in H^1(0, T; X) \hookrightarrow C_b^0([0, T], X)$ gilt.

3.55 Bemerkung. Die Zulässigkeit des Steuerungsoperators im Sinne der Definition 3.54 bedeutet nur, dass die Lösungen von (3.14) um eine Art „maximale Regulariät" verfügen. Man kann in diesem Fall $\mathcal{X} := H^1_{\mathrm{loc}}(0, \infty; X)$ als Raum der zulässigen Zustandsfunktionen wählen. Ist B dagegen nicht zulässig, so muss es keineswegs die Nicht-Wohlgestelltheit von (3.14) bedeuten[96]. Wir werden uns aber im Folgenden nur auf zulässige Steuerungs- und Beobachtungsoperatoren beschränken.

3.56 Definition. Der Beobachtungsoperator $C \in L(X_1, Y)$ heißt

(i) *beschränkt*, falls sich C zu einem Element von $L(X, Y)$ fortsetzen lässt.

(ii) *zum Zeitpunkt $T > 0$ zulässig*, falls sich $x \mapsto w$ zu einer stetigen Abbildung $X \to L^2([0, T], Y)$ erweitern lässt.

(iii) *zulässig*, falls er für ein $T > 0$ zulässig ist.

Offensichtlich ist jeder beschränkte Beobachtungsoperator zulässig.

Analog zu Kapitel 2.2 definieren wir für $T > 0$ den Steuerungs-Zustands-Operator

$$\mathcal{L}_T \colon L^2(0, T; U) \to X_{-1}, \quad u \mapsto \int_0^T S_{-1}(T - s) B u(s) \mathrm{d}s$$

sowie den Zustands-Beobachtungs-Operator

$$\mathcal{M}_T \colon X_1 \to L^2(0, T; Y), \quad x \mapsto CS(\cdot)x.$$

Offensichtlich sind $\mathcal{L}_T$ und $\mathcal{M}_T$ linear und stetig. Überdies gilt:

3.57 Satz (Übung). (i) *Der Steuerungsoperator B ist genau dann zum Zeitpunkt $T > 0$ zulässig, wenn* $\mathrm{im}(\mathcal{L}_T) \subset X$ *gilt.*

[96] Der Begriff der „Zulässigkeit" wird deshalb von manchen prominenten KontrolltheoretikerInnen wie z.B. I. Lasiecka und R. Triggiani kritisiert.

(ii) *Der Beobachtungsoperator C ist genau dann zum Zeitpunkt $T > 0$ zulässig, wenn es ein $c_T > 0$ so gibt, dass*

$$\|\mathcal{M}_T x\|_{L^2(0,T;Y)} \le c_T \|x\|_X \text{ für alle } x \in X_1 \text{ gilt.}$$

Ferner kann den Steuerungs- und Beobachtungsoperator auch als

$$\mathcal{L}_T \in L(L^2(0,\infty;U), X_{-1}) \text{ bzw. } \mathcal{M}_T \in L(X_1, L^2(0,\infty;U))$$

auffassen, indem man die Steuerung auf $(0,T)$ restringiert oder die Beobachtung durch 0_Y auf $(0,\infty)$ fortsetzt.

3.58 Beispiel. Sei $\Omega := (0,\infty)$ und sei $X := L^2(\Omega)$. Wir betrachten die Advektionsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t y(t,x) + \partial_x y(t,x) &= u(t,0) \text{ für } (t,x) \in (0,\infty) \times \Omega, \\ y(t,0) &= 0 \text{ für } t \in (0,\infty), \\ y(0,x) &= y_0(x) \text{ für } x \in \Omega, \end{aligned} \tag{3.17}$$

welche über eine im Punkt $x = 0$ konzentrierte Kontrolle („Delta-Kontrolle") gesteuert wird.

Zur abstrakten Formulierung von Gleichung (3.17) definieren wir den linearen Operator

$$A\colon H_0^1(\Omega) =: D(A) \subset X \to X, \quad y \mapsto -\partial_x y.$$

Wir wissen, dass dieser die Translationshalbgruppe $(S(t))_{t\ge 0}$ (sogenannte „Rechts-Shift-Halbgruppe") auf X gegeben durch

$$(S(t)y)(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \in [0,t], \\ y(x-t), & \text{für } x \in (t,\infty). \end{cases}$$

für $y \in X$ erzeugt. Ferner gilt $D(A^*) = H^1(\Omega)$ und $X_{-1} \backsimeq (H^1(\Omega))'$.

Sei $U := \mathbb{R}$. Dann ist $B\colon U \to X_{-1}$, $u \mapsto u \cdot \delta_0$ linear und stetig, wobei δ_x für $x \in \bar{\Omega}$ durch

$$\langle \delta_x, \varphi \rangle_{(D(A^*))';D(A^*)} := \varphi(x) \text{ für alle } \varphi \in D(A^*) = H^1(\Omega)$$

gegeben ist. Dabei ist zu beachten, dass $\delta_x \in (D(A^*))' \backsimeq X_{-1}$ wegen der Sobolevschen Einbettung gilt, da

$$\|\delta_x\|_{(D(A^*))'} = \sup_{\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}=1} |\varphi(x)| \le \sup_{\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}=1} \|\varphi\|_{C_b^0(\Omega)} \le c\|\varphi\|_{H^1(\Omega)} = c.$$

Also ist $B \in L(\mathbb{R}, X_{-1}) \simeq X_{-1}$.

Die abstrakte Formulierung von (3.17) lautet daher

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) \text{ für } t > 0, \quad y(0) = y_0.$$

Die Zulässigkeit von B folgt nun aus der Tatsache, dass für alle $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R})$

$$(\mathcal{L}_t u)(x) = \begin{cases} u(t-x), & \text{für } x \in [0,t], \\ 0, & \text{für } x > t. \end{cases}$$

für alle $t > 0$ gilt, woraus sich $\mathcal{L}_t u \in L^2(0,\infty;\mathbb{R}) = L^2(\Omega)$ und damit $\mathrm{im}(\mathcal{L}_t) \subset X$ ergibt.

3.59 Satz. *Gilt* $\mathrm{im}(\mathcal{L}_T) \subset X$ *für ein* $T > 0$, *so folgt*

$$\mathcal{L}_t \in L(L^2(0,\infty;U), X) \text{ für alle } t > 0.$$

Beweis. Offensichtlich lässt sich $\mathcal{L}_T$ zu einem Element von $L(L^2(0,\infty;U), X_{-1})$ fortsetzen. Wir zeigen zunächst, dass $\mathrm{graph}(\mathcal{L}_T) \subset L^2(0,\infty;U) \times X$ abgeschlossen ist. Seien $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(0,\infty;U)$ und

$$x_n := \mathcal{L}_t u_n \in X \text{ für } n \in \mathbb{N},$$

wobei $u_n \to u \in L^2(0,\infty;U)$ und $x_n \to x \in X$ für $n \to \infty$ gelte. Unter Beachtung von $\mathcal{L}_T \in L(L^2(0,\infty;U), X_{-1})$ folgt

$$x = X\text{–}\lim_{n\to\infty} x_n = X_{-1}\text{–}\lim_{n\to\infty} x_n = \mathcal{L}_T\big(L^2(0,\infty;U)\text{–}\lim_{n\to\infty} u_n\big) = \mathcal{L}_T u$$

und damit $\mathcal{L}_T u = x$. Der Satz vom abgeschlossenen Graphen liefert damit $\mathcal{L}_T \in L(L^2(0,\infty;U), X)$.

Sei $t \in (0,T)$. Wir substituieren $T - \sigma := t - s$, d.h. $\sigma := T - t + s$, und finden

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t u &= \int_0^t S_{-1}(t-s)Bu(s)\mathrm{d}s = \int_{T-t}^T S_{-1}(T-\sigma)Bu(t-T+\sigma)\mathrm{d}\sigma \\ &= \int_0^T S_{-1}(T-\sigma)B\widetilde{u}(\sigma)\mathrm{d}\sigma = \mathcal{L}_T\widetilde{u} \text{ mit } \widetilde{u}(t) := \begin{cases} u(t-T+\sigma), & \sigma \in [T-t,T], \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

für alle $u \in L^2(0,t;U)$. Wegen $\|\widetilde{u}\|_{L^2(0,T;U)} \le \|u\|_{L^2(0,t;U)}$ folgt

$$\|\mathcal{L}_t u\|_X \le \|\mathcal{L}_T\|_{L(L^2(0,T;U),X)}\|\widetilde{u}\|_{L^2(0,T;U)} \le \|\mathcal{L}_T\|_{L(L^2(0,T;U),X)}\|u\|_{L^2(0,t;U)},$$

d.h. $\mathcal{L}_t \in L(L^2(0,t;U), X)$, und damit $\mathcal{L}_t \in L(L^2(0,\infty;U), X)$.

Aufgrund der Identität

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2T} &= \int_0^{2T} S_{-1}(2T-s)Bu(s)\mathrm{d}s \\ &= S_{-1}(T)\int_0^T S_{-1}(T-s)Bu(s)\mathrm{d}s + \int_T^{2T} S_{-1}(2T-s)Bu(s)\mathrm{d}s \\ &= S_{-1}(T)\mathcal{L}_\tau\big(u|_{(0,T)}\big) + \mathcal{L}_T\big(u(\cdot - T)|_{(0,T)}\big) \end{aligned}$$

ist $\mathcal{L}_{2T}$ beschränkt. Induktiv folgt die Beschränktheit von $\mathcal{L}_{2^n T}$, $n \in \mathbb{N}$, und damit auch die Beschränktheit von $\mathcal{L}_t$ für alle $t > 0$. $\square$

Analog kann man beweisen:

3.60 Satz. *Ist C ein zulässiger Beobachtungsoperator, so gilt für alle $t > 0$*

$$\mathcal{M}_t \in L(X, L^2(0, \infty; Y)).$$

3.61 Satz (Übung)**.** *Es gilt*

$$Bu = (X_{-1}\text{-}) \lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t} \mathcal{L}_t(\chi_{[0,1]} \cdot u), \quad Cx = (Y\text{-}) \lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t (\mathcal{M}_t x)(s) \mathrm{d}s$$

für alle $u \in U$ und $x \in X_1$.

3.62 Satz (Übung)**.** *Ist B ein zulässiger Steuerungsoperator, so gilt*

$$(t, u) \mapsto \mathcal{L}_t u \in C^0([0, \infty) \times L^2([0, \infty), U), X).$$

Folgendes Resultat stellt die Dualität zwischen dem Steuerbarkeits- und dem Beobachtbarkeitsbegriff fest und spielt bei vielen Anwendungen eine wichtige Rolle.

3.63 Satz. *Sei X ein Hilbertraum und sei $A\colon D(A) \subset X \to X$ der infinitesimale Erzeuger einer C_0-Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ auf X. Dann ist $B \in L(U, X_{-1})$ genau dann ein zulässiger Steuerungsoperator für die Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$, d.h. für das Steuerungssystem*

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) \text{ für } t > 0, \quad y(0) = x \in X,$$

wenn $B^* \in L(X_1^d, U)$ ein zulässiger Beobachtungsoperator für die duale Halbgruppe $(S^*(t))_{t \geq 0}$ ist, d.h. für das Beobachtungssystem

$$\dot{z}(t) = A^* z(t) \text{ für } t > 0, \quad w(t) = B^* y(t) \text{ für } t > 0, \quad z(0) = x \in X.$$

Beweis. Da X reflexiv ist, wissen wir, dass X_{-1} zu $(D(A^*))'$ isomorph ist.

„$\Rightarrow$" Wir nehmen zunächst an, dass B ein zulässiger Steuerungsoperator ist. Dann folgt mit Satz 3.59 $\mathcal{L}_T \in L(L^2(0, \infty; U), X)$ und damit $\mathcal{L}_T^* \in L(X, L^2(0, T; X))$ mit

$$\langle \mathcal{L}_T u, x \rangle_X = \langle u, \mathcal{L}_T^* x \rangle_{L^2(0,\infty;U)} \text{ für alle } u \in L^2(0, \infty; U) \text{ und } x \in X.$$

Wir wollen nun den zum Operator $\mathcal{L}_T$ Hilbertraum-adjungierten Operator $\mathcal{L}_T^* \in L(X, L^2(0,\infty;U))$ explizit bestimmen. Für $x \in D(A^*)$ finden wir

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{L}_T u, x\rangle_X &= \Big\langle \int_0^T S_{-1}(T-s)Bu(s)\mathrm{d}s, x\Big\rangle_{(D(A^*))';D(A^*)} \\
&= \int_0^T \langle S_{-1}(T-s)Bu(s), x\rangle_{(D(A^*))';D(A^*)}\mathrm{d}s \\
&= \int_0^T \langle B^*S^*(T-s)x, u(s)\rangle_X \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

für alle $u \in L^2(0,T;U)$, woraus sich

$$\mathcal{L}_T^* x = B^*S^*(T-\cdot)x \text{ fast überall in } [0,T] \text{ für alle } x \in D(A^*) \text{ ergibt.}$$

Wegen $\mathcal{L}_T^* \in L(X, L^2(0,T;U))$ folgt nun

$$\int_0^T \|B^*S^*(T-s)x\|_U^2 \mathrm{d}s \leq c_T^2 \|x\|_X^2 \text{ für alle } x \in D(A^*),$$

d.h. B^* ist ein zulässiger Beobachtungsoperator für die Halbgruppe $(S^*(t))_{t\geq 0}$.

„$\Leftarrow$" Sei nun umgekehrt B^* ein zulässiger Beobachtungsoperator für die duale Halbgruppe. Dies bedeutet, dass sich jeder der Operatoren

$$\widetilde{\mathcal{M}}_t \colon D(A^*) \to L^2(0,t;U), \quad x \mapsto B^*S^*(t-s)x \tag{3.18}$$

für $t \in [0,T]$ zu einem Operator aus $L(X, L^2(0,t;U))$ fortsetzen lässt, welchen wir wiederum mit $\widetilde{\mathcal{M}}_t$ bezeichnen. Überdies existiert ein $c_T > 0$ so, dass

$$\|\widetilde{\mathcal{M}}_t x\|_{L(X,L^2(0,t;U))} \leq c_T\|x\| \text{ für alle } x \in X, t \in [0,T] \text{ gilt.} \tag{3.19}$$

Für den Hilbertraum-Adjungierten $\widetilde{\mathcal{M}}_t^* \in L(L^2(0,t;U), X)$ gilt

$$\langle \widetilde{\mathcal{M}}_t^* x, u\rangle_{L^2(0,t;U)} = \langle x, \widetilde{\mathcal{M}}_t^* u\rangle_X \text{ für alle } x \in X, u \in L^2(0,t;U), \tag{3.20}$$

woraus sich unter Beachtung von Gleichung (3.19) die Existenz von $k_T > 0$ mit

$$\|\widetilde{\mathcal{M}}_t\|_{L(L^2(0,t;U),X)} \leq k_T \text{ für } t \in [0,T] \text{ ergibt.}$$

Angenommen, $u \in C^1([0,T],U)$, dann folgt mit Korollar 3.44

$$t \mapsto y(t) = \int_0^t S_{-1}(t-s)Bu(s)\mathrm{d}s \in C^0([0,T],X)$$

und damit

$$\begin{aligned}\langle \widetilde{\mathcal{M}}_t x, u\rangle_{L^2(0,t;U)} &= \int_0^t \langle B^* S^*(t-s)x, u(s)\rangle_U \mathrm{d}s \\ &= \Big\langle \int_0^t S_{-1}(t-s)Bu(s)\mathrm{d}s, x\Big\rangle_{(D(A^*))';D(A^*)} \\ &= \int_0^t \langle S_{-1}(t-s)Bu(s), x\rangle_X \mathrm{d}s\end{aligned}$$

für alle $u \in C^1([0,T],U)$ und $x \in D(A^*)$. Da $D(A^*)$ dicht in X liegt, folgt mit Gleichung (3.20)

$$(\widetilde{M}_t^* u)(t) = y(t) = \int_0^t S_{-1}(t-s)Bu(s)\mathrm{d}s \text{ für alle } t \in [0,T]$$

für alle $u \in C^1([0,T],U)$. Mit (3.19) folgt also

$$\|y\|_{C^0([0,T],X)} \leq k_T \|u\|_{L^2(0,T;U)} \text{ für alle } u \in C^1([0,T],U). \tag{3.21}$$

Es sei nun $u \in L^2(0,T;U)$ und sei $z \in H^1(0,T;X_{-1})$ die zugehörige milde Lösung von

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) \text{ für } t > 0, \quad y(0) = x.$$

Wir wählen eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^1([0,T],U)$ mit $u_n \to u$ in $L^2(0,T;U)$ für $n \to \infty$ und bezeichnen mit y_n die zur Steuerung u_n für $n \in \mathbb{N}$ gehörige Lösung. Nach (3.21) muss es sich bei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um eine Cauchyfolge in $C^0([0,T],X)$ handeln, was die Existenz einer Funktion $\widetilde{y} \in C^0([0,T],X)$ mit $y_n \to \widetilde{y}$ in $C^0([0,T],X)$ nach sich zieht. Wegen der stetigen Einbettung $X \hookrightarrow (D(A^*))'$ folgt dann auch $y_n \to \widetilde{y}$ in $C^0([0,T],(D(A^*))')$. Deshalb ist $y = \widetilde{y} \in C^0([0,T],X)$ für alle $u \in L^2(0,T;X)$, d.h. B ist ein zulässiger Steuerungsoperator für die Halbgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$.

Dies beendet den Beweis. □

3.64 Korollar. *Ist B ein zulässiger Steuerungsoperator für $(S(t))_{t\geq 0}$ bzw. ist B^* ein zulässiger Beobachtungsoperator für $(S^*(t))_{t\geq 0}$, so gilt $\mathcal{L}_T^* = \widetilde{\mathcal{M}}_t$, wobei $\mathcal{L}_T \in L(L^2(0,T;U);X)$ und $\widetilde{\mathcal{M}}_t \in L(X, L^2(0,T;U))$ wie oben definiert sind.*

Abschließend wollen wir den Begriff der Zulässigkeit am unendlichen Zeithorizont diskutieren.

3.65 Definition. Seien $B \in L(U,X_{-1})$ und $C \in L(X_1,Y)$.

(i) Der Steuerungsoperator B heißt *am unendlichen Zeithorizont zulässig*, falls es ein $c > 0$ so gibt, dass

$$\|\mathcal{L}_T\|_{L(L^2(0,\infty;U),X)} \leq c \text{ für alle } T > 0 \text{ gilt.}$$

(ii) Der Beobachtungsoperator C heißt *am unendlichen Zeithorizont zulässig*, falls es ein $c > 0$ so gibt, dass

$$\|\mathcal{M}_T x\|_{L^2(0,\infty;Y)} \leq k\|x\|_X^2 \text{ für alle } x \in X_1 \text{ und } T > 0 \text{ gilt.}$$

Es lässt sich folgendes Resultat zeigen.

3.66 Satz. *Es gilt:*

(i) *Jeder am unendlichen Zeithorizont zulässiger Steuerungs- bzw. Beobachtungsoperator ist zulässig.*

(ii) *Ist $(S(t))_{t\geq 0}$ exponentiell stabil (d.h. $\|S(t)\|_{L(X)} \leq Ce^{-\omega t}$ für alle $t \geq 0$ mit gewissen $C \geq 1$, $\omega > 0$) und ist B bzw. C ein zulässiger Steuerungs- bzw. Beobachtungsoperator, so ist B bzw. C auch am unendlichen Zeithorizont zulässig.*

3.67 Definition. Sei $C \in L(X_1, Y)$ ein Beobachtungsoperator.

(i) Ist C zum Zeitpunkt $T > 0$ zulässig, so heißt die Abbildung

$$\mathcal{R}_T := \mathcal{M}_T^* \mathcal{M}_T = \int_0^T S^*(t) C^* C S(t) \mathrm{d}t \in L(X)$$

der *Gramsche Beobachtbarkeitsoperator.*

(ii) Ist C am unendlichen Zeithorizont zulässig, so heißt die Abbildung

$$\mathcal{R} := \lim_{T \nearrow \infty} \mathcal{M}_T^* \mathcal{M}_T \in L(X)$$

der *Gramsche Beobachtbarkeitsoperator am unendlichen Zeithorizont.*

3.68 Definition. Eine C_0-Halbgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$ auf X heißt:

(i) (gleichmäßig) beschränkt, falls $\sup_{t\geq 0} \|S(t)\|_{L(X)} < \infty$.

(ii) (asymptotisch) gleichmäßig stabil, falls $\lim_{t\to\infty} \|S(t)\|_{L(X)} = 0$.

(iii) (asymptotisch stark) stabil, falls $\lim_{t\to\infty} S(t)x = 0_X$ für alle $x \in X$.

(iv) (asymptotisch) schwach stabil, falls $\lim\limits_{t\to\infty}\langle x', S(t)x\rangle_{X';X} = 0$ für alle $x \in X$, $x' \in X'$.

In gewisser Analogie zum Kapitel 2.3 gilt der folgende Satz.

3.69 Satz (ohne Beweis). *Sei $C \in L(X_1, Y)$ ein Beobachtungsoperator. Äquivalent sind:*

(i) *C ist am unendlichen Zeithorizont zulässig.*

(ii) *Es gibt ein $\widetilde{\mathcal{R}} \in L(X)$ so, dass für alle $x \in D(A)$*

$$\widetilde{\mathcal{R}}x = \lim_{T\to\infty}\int_0^T S^*(t)C^*CS(t)x\mathrm{d}t.$$

(iii) *Es existiert ein positiv semidefiniter Operator $P \in L(X)$, welcher die Lyapunovsche Gleichung*

$$A^*Px + PAx = -C^*Cx \text{ für alle } x \in D(A)$$

löst oder die Lyapunovsche Ungleichung

$$2\mathrm{Re}\,\langle Px, Ax\rangle_X \leq -\|Cx\|_X^2 \text{ für alle } x \in D(A)$$

erfüllt.

3.70 Korollar. *Ist C am unendlichen Zeithorizont zulässig, so gilt:*

(i) *$\widetilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R}$, d.h. $\widetilde{\mathcal{R}}$ ist der Gramsche Beobachtbarkeitsoperator am unendlichen Zeithorizont.*

(ii) *$\widetilde{\mathcal{R}}$ löst die Lyapunovsche Gleichung und ist die kleinste positiv semidefinite Lösung der Lyapunovschen Ungleichung.*

(iii) *$\lim\limits_{t\to\infty}\widetilde{\mathcal{R}}^{1/2}S(t)x = 0_X$ für alle $x \in X$.*

(iv) *Ist $(S(t))_{t\geq 0}$ stark stabil, so ist $\widetilde{\mathcal{R}}$ die eindeutige Lösung der Lyapunovschen Gleichung.*

(v) *Ist $(S(t))_{t\geq 0}$ beschränkt und $\widetilde{\mathcal{R}}$ invertierbar, so ist $(S(t))_{t\geq 0}$ schwach stabil.*

3.71 Satz. *Sei $A\colon D(A) \subset X \to X$ selbstadjungiert und negativ semidefinit. Ferner sei $X_{1/2} := \mathrm{cl}(D(A), \|\cdot\|_{X_{1/2}})$, wobei $\|\cdot\|_{X_{1/2}} := \big(\langle(\mathrm{id}_X - A)\cdot,\cdot\rangle_X\big)^{1/2}$. Ist $C \in L(X_{1/2}, Y)$, dann ist C ein zulässiger Beobachtungsoperator für die von A erzeugte C_0-Halbgruppe auf X.*

Beweis. Der Operator A ist dissipativ. Nach dem Lemma von Lax & Milgram gilt $(0,\infty) \subset \rho(A)$, also ist A m-dissipativ und erzeugt daher ein C_0-Kontraktionshalbgruppe.

Wir verwenden ohne Beweis, dass $(\mathrm{id}_X - A)^{1/2} := (((\mathrm{id}_X - A)^{-1})^{1/2})^{-1}$ den Isomorphismus zwischen $X_{1/2}$ und $D((\mathrm{id}_X - A)^{-1/2}) := \mathrm{im}(((\mathrm{id}_X - A)^{-1})^{1/2})$ darstellt. Die Voraussetzung an C liefert dann eine Konstante $c > 0$ so, dass

$$\|Cx\|_X^2 \leq c^2 \langle (\mathrm{id}_X - A)x, x\rangle_X \text{ für alle } x \in D(A) \text{ gilt.}$$

Für $P := \frac{c^2}{2}\mathrm{id}_X$ folgt also

$$2\mathrm{Re}\langle Px, (A - \mathrm{id}_X)x\rangle_X \leq -\|Cx\|_X^2 \text{ für alle } x \in D(A).$$

Mit Satz (3.69) folgt, dass C ein zulässiger Beobachtungsoperator für die von $A - \mathrm{id}_X$ erzeugte Halbgruppe ist, was die Zulässigkeit am unendlichen Zeithorizont auch für die von A erzeugte Halbgruppe nach sich zieht. □

3.72 Beispiel. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet und seien $b \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$, $c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. Wir betrachten ein Beobachtungssystem für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t z &= \triangle z \text{ in } (0,\infty) \times \Omega, \\ z &= 0 \text{ in } (0,\infty) \times \partial\Omega, \\ z(0,\cdot) &= z_0 \text{ in } \Omega, \\ w &= b \cdot \nabla z + cz \text{ in } (0,\infty) \times \Omega. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Um Gleichung (3.22) abstrakt formulieren zu können, definieren wir den Zustandsraum $X := L^2(\Omega)$. Desweiteren führer wir den Operator

$$A\colon D(A) \subset X \to X, \quad z \mapsto \triangle z$$

mit $D(A) := \{z \in H_0^1(\Omega) \,|\, \triangle z \in L^2(\Omega)\}$ ein. Dieser ist abgeschlossen, dicht definiert und negativ definit. Ferner folgt nach Beispiel 3.34, dass A eine diagonalisierbare C_0-Kontraktionshalbgruppe auf X erzeugt. Außerdem gilt $X_{1/2} = H_0^1(\Omega)$ versehen mit der Norm $\|\cdot\|_{X_{1/2}} = \|\nabla \cdot\|_{(L^2(\Omega))^d}$.

Nun definieren wir den Beobachtungsraum $Y := L^2(\Omega)$ sowie den Beobachtungsoperator $C \in L(X_{1/2}, Y)$ mittels $C := b \cdot \nabla + c\,\mathrm{id}_Y$. Nach Satz 3.71 ist C ein zulässiger Beobachtungsoperator für das System (3.22). Damit folgt, dass es zu jedem $T > 0$ ein $c_T > 0$ so gibt, dass jede schwache Lösung z von (3.22) der Ungleichung

$$\int_0^T \int_\Omega |b \cdot \nabla z + cz|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leq c_T^2 \|z_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \text{ für alle } z_0 \in L^2(\Omega)$$

genügt.

3.5. Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Seien X, U, Y Hilberträume. Ferner erzeuge der lineare Operator $A\colon D(A) \subset X \to X$ eine C_0-Halbgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$ auf X. Desweiteren seien $B \in L(U, X_{-1})$ bzw. $C \in L(D(A), Y)$ ein zulässiger Steuerungs- bzw. Beobachtungsoperator zu einem Zeitpunkt $T > 0$.

In diesem Abschnitt betrachten wir:

(i) Steuerungssystem:

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) \text{ für } t > 0, \quad y(0) = x \in X. \tag{3.23}$$

(ii) Beobachtungssystem:

$$\dot{z}(t) = Az(t) \text{ für } t > 0, \quad w(t) = Cz(t) \text{ für } t > 0, \quad z(0) = x \in X_1. \tag{3.24}$$

Wir definieren die Räume der zulässigen Steuerungen, Zustände sowie Ausgänge

$$\mathcal{U} := L^2(0,\infty;U), \quad \mathcal{X} := W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(0,\infty;X)\big(\cap L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;X_{-1})\big), \quad \mathcal{Y} := L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;Y).$$

Zu jedem $x \in X$, $u \in \mathcal{U}$ existiert eine eindeutige Lösung $y \equiv y^{x,u} \in \mathcal{X}$ zu (3.23), während Gleichung (3.24) zu jedem $x \in X$ durch ein $(z, w) \equiv (z^x, w^x) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ eindeutig lösbar ist.

Analog zu Kapiteln 2.2.2 und 2.2.3 wollen wir Beobachtungs- und Steuerungsprobleme für die Systeme (3.23) und (3.24) formulieren.

3.73 Definition. Das System (3.23) heißt *zum Zeitpunkt* $T > 0$

(i) *exakt steuerbar*, wenn es für alle $x_0, x_T \in X$ ein $u \in \mathcal{U}$ so gibt, dass$y^{x_0,u}(T) = x_T$ gilt.

(ii) *approximativ steuerbar*, wenn es für alle $x_0, x_T \in X$ und alle $\varepsilon > 0$ ein $u \in \mathcal{U}$ so gibt, dass $\|y^{x_0,u}(T) - x_T\| < \varepsilon$ gilt.

(iii) *Null-steuerbar*, wenn es für alle $x_0 \in X$ ein $u \in \mathcal{U}$ so gibt, dass $y^{x_0,u}(T) = 0_X$ gilt.

3.74 Definition. Das System (3.24) heißt *zum Zeitpunkt* $T > 0$

(i) *exakt beobachtbar*, wenn es ein $c > 0$ so gibt, dass $\|x - \widetilde{x}\|_X \leq c\|w^x - w^{\widetilde{x}}\|_{L^2(0,T;Y)}$ für alle $x, \widetilde{x} \in X_1$ gilt.

(ii) *approximativ beobachtbar*, wenn für alle $x, \widetilde{x} \in X_1$ aus $w^x \equiv w^{\widetilde{x}}$ fast überall in $(0, T)$ bereits $x = \widetilde{x}$ folgt.

(iii) *terminal beobachtbar*, wenn es ein $c > 0$ so gibt, dass $\|z^x(T) - z^{\widetilde{x}}(T)\|_X \leq c\|w^x - w^{\widetilde{x}}\|_{L^2(0,T;Y)}$ für alle $x, \widetilde{x} \in X_1$ gilt.

Wie im beschränkten Fall, gelten folgende Äquivalenzen:

3.75 Satz. *Das System (3.23) ist genau dann zum Zeitpunkt $T > 0$ exakt, approximativ bzw. Null-steuerbar, wenn gilt:*

(i) $\mathrm{im}(\mathcal{L}_T) = X$,

(ii) $\mathrm{cl}(\mathrm{im}(\mathcal{L}_T), \|\cdot\|_X) = X$ *bzw.*

(iii) $\mathrm{im}(S(T)) \subset \mathrm{im}(\mathcal{L}_T)$.

3.76 Satz. *Das System (3.24) ist genau dann zum Zeitpunkt $T > 0$ exakt, approximativ bzw. terminal beobachtbar, wenn gilt:*

(i) $\mathcal{M}_T$ *ist nach unten beschränkt,*

(ii) $\ker(\mathcal{M}_T) = \{0_X\}$ *bzw.*

(iii) $\mathcal{M}_T$ *ist durch $S(T)$ nach unten beschränkt.*

3.77 Korollar. *Das System (3.24) ist genau dann zum Zeitpunkt $T > 0$ exakt bzw. approximativ beobachtbar, wenn der Gramsche Beobachtbarkeitsoperator $\mathcal{R}_T$ stetig invertierbar ist (was mit seiner gleichmäßigen Positivität gleichbedeutend ist) bzw. wenn* $\ker(\mathcal{R}_T) = \{0_X\}$ *gilt.*

3.78 Bemerkung. Ist das System (3.24) exakt beobachtbar, so lässt sich der Anfangszustand über die Vorschrift $x = \mathcal{R}_T^{-1}\mathcal{M}_T^* w$ stetig rekonstruieren.

3.79 Bemerkung. Offensichtlich zieht die exakte Steuerbarkeit bzw. die exakte Beobachtbarkeit die approximative und die Null-Steuerbarkeit bzw. die approximative und die terminale Beobachtbarkeit nach sich. Lässt sich $(S(t))_{t\geq 0}$ zu einer C_0-Gruppe auf X erweitern, so ist die exakte Steuerbarkeit bzw. die exakte Beobachtbarkeit zur Null-Steuerbarkeit bzw. zur terminalen Beobachtbarkeit äquivalent. Gilt $\ker(S(T)) = \{0_X\}$, was z.B. für diagonalisierbare Halbgruppen immer der Fall ist, so folgt aus der Null-Steuerbarkeit bzw. aus der terminalen Beobachtbarkeit die approximate Steuerbarkeit bzw. die approximative Beobachtbarkeit.

Nachstehendes Resultat spielt eine sehr wichtige Rolle bei Anwendungen und folgt analog zum beschränkten Fall mit Korollar 2.75, Lemma 2.76 sowie Korollar 2.77.

3.80 Satz (Dualitätssatz). *Das System*

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) \text{ für } t > 0, \quad y(0) = x \in X$$

ist genau dann zum Zeitpunkt $T > 0$ exakt, approximativ bzw. Null-steuerbar, wenn das duale System

$$\dot{z}(t) = A^* z(t) \text{ für } t > 0, \quad w(t) = B^* z(t) \text{ für } t > 0, \quad z(0) = x \in X_1^d$$

exakt, approximativ bzw. terminal beobachtbar ist, d.h. wenn es ein $c_T > 0$ so gibt, dass gilt:

(i) $\int_0^T \|B^* S^*(t)x\|_U^2 \mathrm{d}t \geq c_T^2 \|x\|_X^2$ *für alle* $x \in D(A^*)$,

(ii) $B^* S^*(t)x = 0_X$ *für fast alle* $t \in [0, T]$ *impliziert* $x = 0_X$ *bzw.*

(iii) $\int_0^T \|B^* S^*(t)x\|_U^2 \mathrm{d}t \geq c_T^2 \|S^*(T)x\|_X^2$ *für alle* $x \in D(A^*)$.

3.81 Satz. *Sei C ein am unendlichen Zeithorizont zulässiger Beobachtungsoperator und sei das System (3.24) zu einem Zeitpunkt $T > 0$ terminal beobachtbar. Dann ist die Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ exponentiell stabil.*

Beweis. Aufgrund der Zulässigkeit am unendlichen Zeithorizont folgt die Existenz einer Konstanten $c > 0$ so, dass

$$\|\mathcal{M}_T x\|_{L^2(0,\infty;Y)} \leq c\|x\|_X^2 \text{ für alle } x \in D(A) \text{ und } T > 0 \text{ gilt,}$$

während die terminale Beobachtbarkeit eine Konstante $k > 0$ mit

$$\|\mathcal{M}_T x\|_{L^2(0,T;Y)} \geq c_T \|S(T)x\|_X \text{ für alle } x \in X \text{ liefert.}$$

Damit existiert ein $\mathcal{M} \in L(X, L^2(0,\infty;Y))$ so, dass $\mathcal{M}_T x = \mathcal{M}x$ fast überall in $(0, T)$ für alle $x \in X$ gilt. Für alle $\tau > 0$ folgt damit

$$\int_\tau^{T+\tau} \|(\mathcal{M}x)(t)\|_Y^2 \mathrm{d}t = \int_0^T \|(\mathcal{M}_T S(\tau)x)(t)\|_Y^2 \mathrm{d}t \geq c_T^2 \|S(T+\tau)x\|_X^2 \text{ für alle } x \in X.$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} c_T^2 \|x\|_X^2 &\geq \int_0^\infty \|(\mathcal{M}x)(t)\|_Y^2 \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^\infty \int_{(k-1)T}^{kT} \|(\mathcal{M}x)(t)\|_Y^2 \mathrm{d}t \\ &\geq c_T^2 \sum_{k=1}^\infty \|S(kT)x\|_X^2 \end{aligned} \tag{3.25}$$

und daher existiert ein $C > 0$ so, dass

$$\|S(kT)\|_{L(X)} \leq \tfrac{C}{k} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0 \text{ gilt.}$$

Unter Benutzung der Halbgruppeneigenschaft folgt nun

$$\|S(nT)x\|^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \|S((n-k)T)S(kT)x\|^2 \leq \frac{c^2}{nc_T^2}\sum_{k=1}^{n} \|S(kT)x\|_X^2,$$

woraus sich mit (3.25)

$$\|S(nT)x\|_X^2 \leq \frac{c^2}{nc_T^2} \cdot \frac{c^2}{c_T^2}\|x\|_X^2 \text{ für alle } x \in X$$

ergibt, d.h. $\|S(nT)\|_{L(X)} \leq q < 1$ für hinreichend große n und damit

$$\begin{aligned}\|S(t)\|_{L(X)} &\leq \|S(nT\lfloor \tfrac{t}{nT}\rfloor + nT\{\tfrac{t}{nT})\}\|_{L(X)} \leq \max_{0\leq s\leq nT} \|S(s)\|_{L(X)} \cdot q^{\lfloor \frac{t}{nT}\rfloor} \\ &\leq \max_{0\leq s\leq nT} \|S(s)\|_{L(X)} \cdot q^{\frac{t}{nT}-1} = \tfrac{1}{q} \cdot \max_{0\leq s\leq nT} \|S(s)\|_{L(X)} \cdot e^{-t\frac{\ln q}{nT}} \text{ für } t \geq 0.\end{aligned}$$

Also ist $(S(t))_{t\geq 0}$ exponentiell (insbesondere gleichmäßig) stabil. □

3.82 Korollar (Datko[97]s Theorem). *Eine C_0-Halbgruppe $(S(t))_{t\geq 0} \subset L(X)$ ist genau dann L^2-stabil, d.h.*

$$\int_0^\infty \|S(t)x\|_X^2 \mathrm{d}t < \infty \textit{ für alle } x \in X,$$

wenn sie exponentiell stabil ist.

Beweis. Ist exponentiell stabil, so folgt trivial die Konvergenz des Integrals.

Umgekehrt folgt unter Benutzung des Satzes vom abgeschlossenen Graphen, dass $C := \mathrm{id}_X\colon X \to X =: Y$ ein am unendlichen Zeithorizont zulässiger Beobachtungsoperator ist. Sei $T > 0$ beliebig, aber fest und sei $M := \max\limits_{t\in[0,T]} \|S(t)\|_{L(X)}$. Dann gilt

$$\|S(T)x\|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \|S(T-t)S(t)x\|^2 \mathrm{d}t \leq \frac{M^2}{T}\int_0^T \|S(t)x\|_X^2 \mathrm{d}t \text{ für alle } x \in X,$$

d.h. die Halbgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$ ist über den Beobachtungsoperator C zum Zeitpunkt T terminal beobachtbar. Nun liefert Satz 3.81 die exponentielle Stabilität. □

[97]Richard F. Datko, 13. Mai 1932 – 31. März 2006.

4. Anwendungen für partielle Differentialgleichungen

In diesem Kapitel wollen wir die abstrakten Resultate des vorangehenden Kapitels auf Steuerungs- und Beobachtungsprobleme für zeitabhängige partielle Differentialgleichungen anwenden.

4.1. Sobolev-Slobodeckij-Räume und Spuroperatoren

4.1 Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet. Für $p \in [1, \infty)$, $\theta \in (0, 1)$ definieren wir die *Slobodeckij*[98]*-„Halbnorm”*

$$[f]_{\theta,p} := \Big(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{\theta p + d}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \Big)^{1/p} \text{ für } f \in L^p(\Omega)$$

bzw.

$$[f]_{\theta,\infty} := \operatorname*{ess\,sup}_{x,y\in\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|_X}{|x-y|^\theta} \text{ für } f \in L^\infty(\Omega).$$

Sei $s \in (0, \infty)\backslash\mathbb{N}$ und sei $\theta = s - \lfloor s \rfloor \in (0, 1)$. Der Raum

$$W^{s,p}(\Omega) := \Big\{ f \in W^{\lfloor s \rfloor,p}(\Omega) \,|\, \sup_{|\alpha| = \lfloor s \rfloor} [\partial^\alpha f]_{\theta,p} < \infty \Big\}$$

versehen mit der Norm

$$\|f\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \|f\|_{W^{\lfloor s \rfloor,p}(\Omega)} + \sup_{|\alpha| = \lfloor s \rfloor} [\partial^\alpha f]_{\theta,p}$$

heißt der *Sobolev-Slobodeckij-Raum*. Ferner sei

$$W_0^{s,p}(\Omega) := \mathrm{cl}\big(C_0^\infty(\Omega) \,|\, \|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)}\big).$$

Es gelten die folgenden Einbettungs- sowie Kompaktheitsresultate:

4.2 Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und seien $s, s_1, s_2 > 0$, $m \in \mathbb{N}$ mit $s \geq m$, $s_1 > s_2$. Es gilt:*

(i) $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega)$.

(ii) $W^{s,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \subset C^m$ *und* $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C^m(\bar{\Omega})$, *falls* $s > \frac{n}{p} + m$.

(iii) $W^{s_2,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s_1,p}(\Omega)$ *kompakt, falls* Ω *ein beschränktes Lipschitz-Gebiet ist und* $p \neq \infty$ *gilt.*

[98] Lev Naumovič Slobodeckij.

(iv) $W_0^{s,p}(\Omega) = W^{s,p}(\Omega)$, *falls* $s < \frac{1}{p}$.

Die obige Definition lässt sich auch auf Flächen und Mannigfaltigkeiten übertragen, indem man man diese lokal als offene Menge aus einem Raum kleinerer Dimension darstellt. Hier verwenden wir eine allgemeinere Definition, welche aber bei hinreichender Glattheit des Randes zum Lokalisierungszugang äquivalent ist.

4.3 Definition. Sei Ω ein Lipschitz-Gebiet und sei $\Gamma \subset \partial\Omega$ relativ offen.

Ist $f\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ bzgl. des Flächenmaßes auf Γ messbar, so definiert man die Lebesgue-„Norm"

$$\|f\|_{L^p(\Gamma)} := \Big(\int_\Gamma |f(x)|^p \mathrm{d}\Gamma(x) \Big)^{1/p} \text{ für } p \in [1, \infty)$$

bzw.

$$\|f\|_{L^\infty(\Gamma)} := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Gamma} |f(x)|.$$

Für $p \in [1, \infty]$ definieren wir den Raum $L^p(\Gamma)$ als Faktorisierung von

$$\{f\colon \Gamma \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ messbar bzgl. des Flächenmaßes auf } \Gamma \text{ mit } \|f\|_{L^p(\Gamma)} < \infty\}$$

bgzl. der Gleichheitsrelation fast überall in Γ.

Ferner definieren wir die *Slobodeckij-„Halbnorm" auf* Γ

$$[f]_{\theta,p} := \Big(\int_\Gamma \int_\Gamma \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{\theta p + d}} \mathrm{d}\Gamma(x) \mathrm{d}\Gamma(y) \Big)^{1/p} \text{ für } f \in L^p(\Gamma)$$

bzw.

$$[f]_{\theta,\infty} := \operatorname*{ess\,sup}_{x,y \in \Gamma} \frac{|f(x) - f(y)|_X}{|x - y|^\theta} \text{ für } f \in L^\infty(\Gamma).$$

Sei $s \in (0, \infty) \backslash \mathbb{N}$ und sei $\theta = s - \lfloor s \rfloor \in (0, 1)$. Der Raum

$$W^{s,p}(\Gamma) := \Big\{ f \in W^{\lfloor s \rfloor, p}(\Gamma) \,|\, \sup_{|\alpha| = \lfloor s \rfloor} [\partial^\alpha f]_{\theta,p} < \infty \Big\}$$

versehen mit der Norm

$$\|f\|_{W^{s,p}(\Gamma)} := \|f\|_{W^{\lfloor s \rfloor, p}(\Gamma)} + \sup_{|\alpha| = \lfloor s \rfloor} [\partial^\alpha f]_{\theta,p}$$

heißt der *Sobolev-Slobodeckij-Raum.*

Wir schreiben $H^s(\Omega) := W^{s,2}(\Omega)$ und $H^s(\Gamma) := W^{s,2}(\Gamma)$ für $s > 0$.

4.4 Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und sei $s > 0$.

(i) Wir definieren $H^{-s}(\Omega)$ als den Dualraum von $H_0^s(\Omega)$ bzgl. des Skalarprodukts auf $L^2(\Omega)$.

(ii) Ist Ω ein Lipschitz-Gebiet und ist $\Gamma \subset \partial\Omega$ relativ offen, so definieren wir $H^{-s}(\Gamma)$ als den Dualraum von $H^s(\Gamma)$ bzgl. des Skalarprodukts auf $L^2(\Gamma)$.

4.5 Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Lipschitz-Gebiet. Die Abbildungen

$$\gamma_0, \gamma_1 \colon C^1(\bar{\Omega}) \to C^0(\partial\Omega) \text{ mit } \gamma_0 f := f|_{\partial\Omega} \text{ und } \gamma_1 f := \tfrac{\partial f}{\partial \nu} := \nabla f|_{\partial\Omega} \cdot \nu \text{ für } f \in C^1(\bar{\Omega})$$

heißen die *Dirichlet-Spur* bzw. die *Neumann-Spur* (oder die *Normalableitung*).

Es gilt:

4.6 Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet.*

(i) *Hat Ω einen Lipschitz-Rand, so lässt sich der Operator γ_0 eindeutig zu einem Element von $L(H^1(\Omega), H^{1/2}(\partial\Omega))$ fortsetzen. Außerdem gilt $H^1_\Gamma(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega) \,|\, (\gamma_0 f)|_\Gamma \equiv 0\}$ für alle relativ offenen $\Gamma \subset \partial\Omega$.*

(ii) *Ist $\partial\Omega \in C^2$, so lässt sich der Operator γ_1 eindeutig zu einem Element von $L(H^2(\Omega), H^{1/2}(\partial\Omega))$ fortsetzen. Außerdem gilt $\gamma_1(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) = H^{1/2}(\partial\Omega)$.*

(iii) *Der Raum $\{f \in \gamma_0(H^1(\Omega)) \,|\, \operatorname{supp}(f) \subset \Gamma\}$ liegt dicht in $L^2(\Gamma)$ für alle relativ offenen $\Gamma \subset \partial\Omega$.*

4.2. Elliptische Probleme

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und seien $\Gamma_0, \Gamma_1 \subset \partial\Omega$ relativ offen und disjunkt mit $\Gamma = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1$. Ferner sei $a \in \mathbb{R}^{d\times d}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix. In diesem Abschnitt diskutieren wir eine Lösungstheorie für die inhomogene Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(a\nabla u) &= f \text{ in } \Omega, \\ u|_{\Gamma_0} &= g_0 \text{ auf } \Gamma_0, \\ \nu \cdot (a\nabla u)|_{\Gamma_1} &= g_1 \text{ auf } \Gamma_1 \end{aligned} \tag{4.1}$$

mit den Randdaten g_0, g_1.

In diesem Abschnitt wird anstatt der Normalableitung $\gamma_1 = \nu \cdot (\nabla \cdot)$ die „allgemeine" Neumann-Spur $\gamma_1 := \nu \cdot (a\nabla \cdot)$ betrachtet.

4.7 Lemma (Erste Poincaré[99]sche Ungleichung). *Gilt $\Gamma_0 \neq \emptyset$, so existiert eine Konstante $c = c(\Omega, \Gamma_0) > 0$ so, dass*

$$\|f\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c^2 \|\nabla f\|_{(L^2(\Omega))^d} \text{ für alle } f \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \text{ gilt.}$$

Beweis. Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen, die Ungleichung wäre falsch. Dann gäbe es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ so, dass

$$\|f_n\|_{L^2(\Omega)} = 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } \|\nabla f_n\|_{(L^2(\Omega))^d} \to 0 \text{ für } n \to \infty. \tag{4.2}$$

Offensichtlich ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ beschränkt. Nach dem Satz von Alaoglu[100] existiert ein $f \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ und Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, welche schwach gegen f konvergiert, d.h.

$$\lim_{k\to\infty} \langle f_{n_k}, \varphi\rangle_{H^1(\Omega)} = \langle f, \varphi\rangle_{H^1(\Omega)} \text{ für alle } \varphi \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega).$$

Damit folgt unter Beachtung von Gleichung (4.2)

$$\langle \nabla f, \nabla\varphi\rangle_{(L^2(\Omega))^d} \leftarrow \langle \nabla f_{n_k}, \nabla\varphi\rangle_{(L^2(\Omega))^d} + \langle f_{n_k}, \varphi\rangle_{L^2(\Omega)} - \langle f, \varphi\rangle_{L^2(\Omega)} \to 0 \text{ für } k \to \infty$$

für alle $\varphi \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$. Für $\varphi := f$ folgt insbesondere $\|\nabla f\|_{(L^2(\Omega))^d} = 0$ und daher $\nabla f \equiv 0$ fast überall in Ω. Folglich kann man f mit einer Konstanten und daher mit einem Element von $C^0(\bar{\Omega})$ assoziieren. Wegen $\gamma_0 f \equiv 0$ in Γ_0 muss $f \equiv 0$ in ganz Ω gelten.

Andererseits muss wegen der kompakten Einbettung $H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ die starke Konvergenz $f_{n_{k_l}} \to f$ in $L^2(\Omega)$ für $l \to \infty$ vorliegen. Die Annahme (4.2) impliziert nun $\|f\|_{L^2(\Omega)} = 1$, was einen Widerspruch zu $f \equiv 0$ darstellt. □

Unter Benutzung von Lemma 4.7 folgt mit dem Lemma von Lax & Milgram das klassische Resultat für homogene Randdaten $g_1 \equiv 0$, $g_2 \equiv 0$:

4.8 Satz. *Es gibt eine Konstante $c > 0$ so, dass zu jedem $f \in L^2(\Omega)$, falls $\Gamma_0 \neq \emptyset$, bzw. zu jedem $f \in L^2(\Omega)/\{1\}$, falls $\Gamma_0 = \emptyset$, genau eine schwache Lösung $u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ zu (4.1), d.h.*

$$-\int_\Omega a\nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \mathrm{d}x \text{ für alle } v \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$$

existiert, für welche zudem $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)}$ gilt.

Mit einer globalen elliptischen Abschätzung lässt sich beweisen:

4.9 Satz (Elliptische Regularität). *Gilt $\Gamma \in C^2$ und $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset$, so folgt zusätzlich $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)}$.*

[99] Jules Henri Poincaré, 29. April 1854 – 17. Juli 1912.
[100] Leonidas Alaoglu, 19. März 1914 – August 1981.

Der Satz 4.8 lässt sich so interpretieren, dass der Operator

$$A_0 \colon D(A_0) \subset X \to X, \quad u \mapsto \operatorname{div}(a\nabla u)$$

mit

$$D(A_0) := \{u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \cap X \,|\, \operatorname{div}(a\nabla u) \in X, \quad \int_\Omega \operatorname{div}(a\nabla u) \cdot v \mathrm{d}x = \\ - \int_\Omega a\nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x \text{ für alle } v \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \cap X\}$$

stetig invertierbar ist. Hierbei ist $X := L^2(\Omega)$, falls $\Gamma_0 \neq \emptyset$, und $X := L^2(\Omega)/\{1\}$ sonst.

Wir wollen den Begriff „der" schwachen Lösung für Gleichung (4.1) für inhomogene Daten definieren, indem wir das Transpositionsprinzip verwenden. Wir betrachten den Operator

$$A \colon D(A) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega), \quad u \mapsto \operatorname{div}(a\nabla u)$$

mit

$$D(A) := \{y \in H^1(\Omega) \,|\, \operatorname{div}(a\nabla u) \in L^2(\Omega)\}$$

und versehen $D(A)$ mit der Norm $(\|A \cdot\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})^{1/2}$. Offensichtlich ist $D(A)$ ein Hilbertraum.

4.10 Satz. *Der Operator γ_1 lässt sich stetig (aber nicht eindeutig) zu einem Element von $L(D(A), H^{-1/2}(\Gamma_1))$ fortsetzen.*

Beweis. Nach Satz 4.6 ist die Dirichlet-Spur $\gamma_0 \in L(H^1(\Omega), H^{1/2}(\partial\Omega))$ surjektiv, woraus sich nach Lemma 2.76 die strikte Positivität von $\gamma_0\gamma_0^*$ ergibt. Also ist $\gamma_0\gamma_0^* \in L(H^{1/2}(\partial\Omega))$ stetig invertierbar.

Sei $f \in H^2(\Omega)$. Für beliebiges $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ definieren wir $\widetilde{\varphi} := \gamma_0^*(\gamma_0\gamma_0^*)^{-1}\varphi \in H^1(\Omega)$. Mit $c := \|\gamma_0^*(\gamma_0\gamma_0^*)^{-1}\|_{L(H^{1/2}(\partial\Omega), H^1(\Omega))}$ ergibt sich dann

$$\gamma_0\widetilde{\varphi} = \varphi \text{ und } \|\widetilde{\varphi}\|_{H^1(\Omega)} \leq c\|\varphi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}.$$

Die Greensche Formel liefert nun

$$\int_{\partial\Omega} (\gamma_1 f)\varphi \mathrm{d}\Gamma = \int_{\partial\Omega} \operatorname{div}(a\nabla f)\widetilde{\varphi}\mathrm{d}x + \int_\Omega a\nabla f \cdot \nabla\widetilde{\varphi}\mathrm{d}x,$$

woraus sich

$$\left| \int_{\partial\Omega} (\gamma_1 f)\varphi \mathrm{d}\Gamma \right| \leq c\|f\|_{D(A)}\|\varphi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \text{ für alle } \varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega) \text{ ergibt.}$$

Dies impliziert $\|\gamma_1 f\|_{H^{-1/2}(\Omega)} \leq c\|f\|_{D(A)}$ und damit die eindeutige Fortsetzbarkeit von γ_1 auf $H^{-1/2}(\Omega)$. $\square$

Analog lässt sich zeigen:

4.11 Satz. *Gilt $\partial\Omega \in C^2$, so lässt sich der Operator γ_0 zu einem Element von $L(\mathcal{W}(A), H^{-1/2}(\partial\Omega))$ fortsetzen, wobei der Hilbertraum*

$$\mathcal{W}(A) := \{g \in L^2(\Omega) \,|\, \mathrm{div}(a\nabla g) \in H^{-1}(\Omega)\}$$

mit der Norm $\sqrt{\|\cdot\|^2_{L^2(\Omega)} + \|a(\nabla\cdot)\|^2_{H^{-1}(\Omega)}}$ versehen ist.

Der Einfachheit halber nehmen wir nun $\partial\Omega \in C^2$, $\Gamma_1 = \emptyset$ und $a = I_{d\times d}$ an. Das Problem (4.1) reduziert sich dann zur Poisson[101]gleichung

$$\begin{aligned} \triangle u &= 0 \text{ in } \Omega, \\ u|_{\Gamma_0} &= v \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{4.3}$$

Ferner gilt $A_0 = \triangle_D$ und $A = \triangle$. Seien $X_1 := D(A_0)$ und $X_{1/2} := D((-A_0)^{1/2})$ versehen mit der Norm $\|A_0\cdot\|_X$ bzw. $\langle -A_0\cdot, \cdot\rangle_X$. Mit X_{-1} und $X_{-1/2}$ sei der Dualraum von X_1 bzw. $X_{-1/2}$ bzgl. X bezeichnet. Es folgt dann $X_1 = H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$, $X_{1/2} = H^1_0(\Omega)$ und $X_{-1/2} = H^{-1}(\Omega)$.

4.12 Definition. Eine Funktion $u \in \mathcal{W}(\triangle)$ heißt eine *schwache Lösung von (4.3) auf* $L^2(\Omega)$, falls sie die Differentialgleichung im Sinne der Distributionen auf $C_0^\infty(\Omega)$ und die Randbedingung im Sinne des fortgesetzten Dirichlet-Spuroperators $\gamma_0 \in L(\mathcal{W}(\triangle), H^{-1/2}(\partial\Omega))$ erfüllt.

Obwohl die Suche nach schwachen Lösungen bereits für Randdaten $v \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ berechtigt ist, gehen wir von der Situation $v \in L^2(\partial\Omega)$ aus.

4.13 Satz. *Zu jedem $v \in L^2(\partial\Omega)$ existiert eine eindeutige Funktion $Dv \in L^2(\Omega)$ mit*

$$\int_\Omega (Dv)(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial(A_0^{-1}g)}{\partial\nu}\mathrm{d}\Gamma \text{ für alle } g \in L^2(\Omega). \tag{4.4}$$

Es ist $D \in L(L^2(\partial\Omega), L^2(\Omega))$ und der zugehörige Hilbertraumadjungierte $D^* \in L(L^2(\Omega), L^2(\partial\Omega))$ lautet

$$D^*g = \frac{\partial(A_0^{-1}g)}{\partial\nu} \text{ für alle } g \in L^2(\Omega).$$

Beweis. Sei $U := L^2(\partial\Omega)$. Wegen $A_0^{-1} \in L(X, X_1)$ sowie $\frac{\partial}{\partial\nu} \in L(X_1, U)$ folgt $\frac{\partial(A_0^{-1}\cdot)}{\partial\nu} \in L(X, U)$. Mit dem Rieszschen Darstellungssatz ergibt sich dann die eindeutige Existenz von $Dv \in X$ mit

$$\langle Dv, g\rangle_X = \left\langle v, \frac{\partial(A_0^{-1}g)}{\partial\nu}\right\rangle_U \text{ für alle } g \in L^2(\Omega).$$

[101]Siméon Denis Poisson, 21. Juni 1781 – 25. April 1840.

Ersetzt man nun g durch $\bar{g}$, so folgt, dass Dv die Variationsgleichung (4.4) erfüllt. Die behauptete Gestalt von D^* ist offensichtlich. □

4.14 Satz. *Es gilt:*

(i) *Für alle $v \in L^2(\partial\Omega)$ ist Dv harmonisch in Ω.*

(ii) $\gamma_0 D = \mathrm{id}_{L^2(\partial\Omega)}$.

Beweis. (i) Wir zeigen zunächst, dass Dv im distributionellen Sinne $\triangle Dv = 0$ erfüllt. Setzt man $g := \triangle\varphi$ für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ in (4.4) ein, so folgt

$$\int_\Omega Dv \cdot \triangle\varphi \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} v \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\mathrm{d}\Gamma = 0,$$

d.h. $\triangle[Dv](\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Mit dem Satz von Weyl[102] folgt nun $Dv \in C^\infty(\Omega)$, weshalb Dv auch im klassischen Sinne harmonisch ist.

(ii) Mit (i) folgt $D \in L(L^2(\partial\Omega), \mathcal{W}(\triangle))$. Also ist $\gamma_0 D$ als Operator auf $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ wohldefiniert.

Mit Satz 4.11 folgt für alle $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ und alle $g \in \mathcal{W}(\triangle)$

$$\langle\gamma_0 g, \bar{\varphi}\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega);H^{1/2}(\partial\Omega)} = \int_\Omega g \cdot \triangle\widetilde{\varphi}\mathrm{d}x - \langle\triangle g, \bar{\widetilde{\varphi}}\rangle_{H^{-1}(\Omega);H_0^1(\Omega)} \tag{4.5}$$

mit

$$\widetilde{\varphi} := \gamma_1^*(\gamma_1\gamma_1^*)^{-1}\varphi \in H^2(\Omega), \quad \gamma_0\widetilde{\varphi} \equiv 0, \quad \gamma_1\widetilde{\varphi} = \varphi.$$

Unter Beachtung von Gleichung (4.5) ergibt sich mit (i)

$$\langle\gamma_0 Dv, \bar{\varphi}\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega);H^{1/2}(\partial\Omega)} = \int_\Omega Dv \cdot \triangle\widetilde{\varphi}\mathrm{d}x.$$

Die Definition von D liefert dann

$$\langle\gamma_0 Dv, \bar{\varphi}\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega);H^{1/2}(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial(A_0^{-1}\triangle\widetilde{\varphi})}{\partial\nu}\mathrm{d}\Gamma.$$

Wegen $\widetilde{\varphi} \in D(A_0)$ ist $-A_0^{-1}\triangle\widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi}$. Für alle $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ gilt daher

$$\langle\gamma_0 Dv, \bar{\varphi}\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega);H^{1/2}(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega} v\varphi\mathrm{d}\Gamma,$$

woraus sich wegen der Dichtheit von $H^{1/2}(\partial\Omega)$ in $L^2(\partial\Omega)$ bereits $\gamma_0 Dv = v$ ergibt.

Dies beendet den Beweis. □

[102] Hermann Klaus Hugo Weyl, 9. November 1885 – 8. Dezember 1955.

4.15 Korollar. *Es ist $D \in L(L^2(\partial\Omega), \mathcal{W}(\triangle))$ und Dv ist eine schwache Lösung von (4.3) auf $\mathcal{W}(\triangle)$ für $v \in L^2(\partial\Omega)$.*

4.16 Definition. Die Abbildung $D \in L(L^2(\partial\Omega), \mathcal{W}(\triangle))$ mit (4.4) heißt die *Dirichlet-Abbildung* oder die *Dirichlet-Map*.

4.17 Satz. *Schwache Lösungen von (4.3) sind eindeutig.*

Beweis. Sei $u \in \mathcal{W}(\triangle)$ eine schwache Lösung von (4.3). Dann gilt für $g := Dv - u \in \mathcal{W}(\triangle)$ im schwachen Sinne

$$\triangle g = 0 \text{ in } \Omega, \quad \gamma_0 g = 0 \text{ auf } \Gamma_0.$$

Mit (4.5) folgt

$$\int_\Omega g \triangle \widetilde{\varphi} \mathrm{d}x = 0 \text{ für alle } \varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega),$$

wobei $\widetilde{\varphi} := \gamma_1^*(\gamma_1\gamma_1^*)^{-1}\varphi \in H^2(\Omega)$. Damit finden wir

$$\int_\Omega g \triangle (\widetilde{\varphi} + \psi) \mathrm{d}x = 0 \text{ für alle } \varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega), \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Wegen $\widetilde{\varphi} \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ist $\widetilde{\varphi} + \psi \in D(A_0)$ und damit

$$\langle g, A_0(\widetilde{\varphi} + \psi)\rangle_{L^2(\Omega)} = 0 \text{ für alle } \varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega), \psi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{4.6}$$

Wir beweisen, dass solche Funktionen $\widetilde{\varphi} + \psi$ dicht in $D(A_0) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ liegen. Zu $f \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ sei $\varphi := \gamma_1 f$. Nach Konstruktion erfüllt dann $\widetilde{\varphi} \in H^2(\Omega)$ die Bedingung $\gamma_1\widetilde{\varphi} = \gamma_1 f$. Für $\psi_0 := f - \widetilde{\varphi} \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ folgt dann $\gamma_1\psi_0 \equiv 0$. Damit ist $\psi_0 \in H^2(\Omega)$ mit $\gamma_0\psi_0 \equiv 0$ und $\gamma_1\psi_0 \equiv 0$. Ferner gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ so, dass $\|\psi - \psi_0\|_{H^2(\Omega)} < \varepsilon$ gilt, woraus sich unmittelbar $\|f - (\widetilde{\varphi} + \psi)\|_{H^2(\Omega)} < \varepsilon$ ergibt. Damit folgt die gewünschte Dichtheitsaussage. Also ist $\{\widetilde{\varphi} + \psi \,|\, \varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega), \psi \in C_0^\infty(\Omega)\}$ dicht in $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Da $A_0 \in L(X_1, X)$ surjektiv ist, folgt mit Gleichung (4.6) $g \equiv 0$. □

4.3. Die Wellengleichung

In diesem Abschnitt betrachten wir ein Beobachtungsproblem und ein Steuerungsproblem für die Wellengleichung in einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit $\partial\Omega \in C^2$. Es seien im Folgenden $\Gamma_0, \Gamma_1 \subset \partial\Omega =: \Gamma$ relativ offen mit $\Gamma_1 \neq \emptyset$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ und $\bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1 = \Gamma$.

4.3.1. Ein Randbeobachtungsproblem

Wir betrachten die Wellengleichung mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen auf ganz $\partial\Omega$ für die unbekannte Zustandsfunktion z, deren Normalableitung $\frac{\partial z}{\partial \nu}$ wir über die Beobachtungsvariable w am Teil Γ_1 des Randes beobachten:

$$\begin{aligned} z_{tt} - \triangle z &= 0 \text{ in } (0,\infty)\times\Omega, \\ z &= 0 \text{ in } (0,\infty)\times\Gamma, \\ w &= \frac{\partial z}{\partial \nu} \text{ in } (0,\infty)\times\Gamma_1, \\ z(0,\cdot) = z_0, &\quad z_t(0,\cdot) = z_1 \text{ in } \Omega. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Wir suchen nach einer funktionalanalytischen Formulierung von (4.7). Seien hierzu $X := L^2(\Omega)$ und $X_1 := H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)$. Ferner sei $A_0 := \triangle_D \in L(X_1, X)$ der Dirichlet-Laplaceoperator. Wir wissen dann, dass der Operator A_0 negativ definit ist, und $X_{1/2} := \mathrm{cl}(X_1, \|\cdot\|_{X_{1/2}})$ mit $\|\cdot\|_{X_{1/2}} := \sqrt{-\langle A_0\cdot,\cdot\rangle_X}$ ein Hilbertraum ist. Wir definieren den Operator

$$A\colon H_1 := X_1 \times X_{1/2} \subset X_{1/2}\times X =: H \to H, \quad A := \begin{pmatrix} 0_{L(X_{1/2})} & \mathrm{id}_X \\ A_0 & 0_{L(X)} \end{pmatrix}.$$

Desweiteren sei $Y := L^2(\Gamma_1)$ und $C \in L(H_1, Y)$ durch

$$C\colon \eta \mapsto \frac{\partial}{\partial\nu}\eta_1\big|_{\Gamma_1} \text{ für alle } \eta = (\eta_1,\eta_2)\in X_1\times X_{1/2} \text{ gegeben.}$$

Setzt man $\eta := (z, z_t)$, $\omega := w$ und $\eta_0 := (z_0, z_1)$, so lässt sich (4.7) wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned} \eta_t(t) &= A\eta(t) \text{ für } t > 0, \\ \omega(t) &= C\eta(t) \text{ für } t > 0, \\ \eta(0) &= \eta_0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Um das Kontrollproblem (4.8) auf exakte Beobachtbarkeit zu untersuchen, muss gezeigt werden:

(i) A erzeugt eine C_0-Halbgruppe auf H.

(ii) C ist ein zulässiger Beobachtungsoperator.

(iii) Das Paar (A, C) ist exakt beobachtbar.

Um (iii) beweisen zu können, wird eine Voraussetzung an die Geometrie von Ω unabdingbar sein.

Die Behauptung (i) folgt mit Beispiel 3.52. Demnach existiert zu jedem $\eta_0 \in H$ bzw. $(z_0, z_1) \in X_1 \times X_{1/2}$ eine eindeutige klassische Lösung $\eta \in C^1(\mathbb{R}, H)\cap C^0(\mathbb{R}, H_1)$

bzw. $z \in C^2(\mathbb{R}, X) \cap C^1(\mathbb{R}, X_{1/2}) \cap C^0(\mathbb{R}; X_1)$ zu (4.8) bzw. (4.7). Hierbei gilt $\omega, w \in C^0(\mathbb{R}, Y)$. Da A sogar eine C_0-Gruppe unitärer Operatoren auf H erzeugt, folgt die „Energieerhaltungsgleichung"

$$\|\eta(t)\|_H^2 = \|\eta_0\|_H^2 \text{ für alle } t \in \mathbb{R}$$

bzw.

$$\|z_t(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla z(t,\cdot)\|_{(L^2(\Omega))^d}^2 = \|z_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla z_0\|_{(L^2(\Omega))^d}^2 \text{ für alle } t \in \mathbb{R}. \tag{4.9}$$

Da sich die Gruppe auf $X \times X_{-1/2}$ unitär fortsetzen lässt, folgt

$$\|z_t(t,\cdot)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|z(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|z_1\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|z_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \text{ für alle } t \in \mathbb{R}$$

für alle $y_0 \in L^2(\Omega)$, $y_1 \in H^{-1}(\Omega)$.

Um die Zulässigkeit von C zu beweisen, benötigen wir die folgenden Hilfssätze.

4.18 Lemma. *Seien $\varphi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ und $q \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^d)$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \int_\Omega (q \cdot \nabla\bar{\varphi}) \triangle\varphi \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (q \cdot \nu) |\nu \cdot \nabla\varphi|^2 \mathrm{d}\Gamma + \tfrac{1}{2} \int_\Omega (\operatorname{div} q) |\nabla\varphi|^2 \mathrm{d}x \\ - \sum_{l,k=1}^d \operatorname{Re} \int_\Omega q_{k,x_l} \bar{\varphi}_{x_k} \varphi_{x_l} \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Beweis. Mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \int_\Omega (q \cdot \nabla\bar{\varphi})\, \triangle\varphi \mathrm{d}x &= \sum_{k,l=1}^d \operatorname{Re} \int_\Omega q_k \bar{\varphi}_{x_k} \partial_{x_l}(\varphi_{x_l}) \mathrm{d}x \\ &= - \sum_{k,l=1}^d \operatorname{Re} \int_\Omega \partial_{x_l}(q_k \bar{\varphi}_{x_k}) \varphi_{x_l} \mathrm{d}x + \operatorname{Re} \int_{\partial\Omega} (q \cdot \nabla\bar{\varphi}) \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \mathrm{d}\Gamma.\end{aligned}$$

Da die Tangentialableitung von φ auf $\partial\Omega$ wegen $\varphi|_{\partial\Omega} \equiv 0$ verschwindet, folgt $\nabla\bar{\varphi}|_{\partial\Omega} = \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\nu}\nu|_{\partial\Omega}$ und damit

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \int_\Omega (q \cdot \nabla\bar{\varphi}) \triangle\varphi \mathrm{d}x = -\tfrac{1}{2} \int_\Omega q \cdot \nabla(|\nabla\varphi|^2) \mathrm{d}x - \sum_{l,k=1}^d \operatorname{Re} \int_\Omega q_{k,x_l} \bar{\varphi}_{x_k} \varphi_{x_l} \mathrm{d}x \\ + \int_{\partial\Omega} (q \cdot \nu) |\nabla\varphi \cdot \nu|^2 \mathrm{d}\Gamma.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Unter Berücksichtigung der Identität

$$\operatorname{div}(\varphi q) = (\nabla\varphi) \cdot q + \varphi \operatorname{div} q \text{ für } \varphi \in H^1(\Omega), v \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^d)$$

folgt
$$q \cdot \nabla(|\nabla\varphi|^2) = \mathrm{div}(|\nabla\varphi|^2 q) - (\mathrm{div} q)|\nabla\varphi|^2.$$
Setzt man dies in Gleichung (4.10) ein, so liefert der Gauß[103]sche Divergenzsatz die Behauptung. $\square$

4.19 Lemma. *Sei*
$$z \in C^0([0,\infty), H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,\infty), H_0^1(\Omega)) \cap C^2([0,\infty), L^2(\Omega))$$
eine klassische Lösung von
$$\begin{aligned} z_{tt} - \triangle z &= F \text{ in } (0,\infty) \times \Omega, \\ z &= 0 \text{ auf } (0,\infty) \times \Gamma \end{aligned} \tag{4.11}$$
und sei $F := \Box z \equiv z_{tt} - \triangle z$. *Ferner seien* $q \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^d)$, $G \in C^1([0,\infty), \mathbb{R})$. *Dann gilt für alle* $T > 0$
$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\partial\Omega} (q \cdot \nu)|\nabla z \cdot \nu|^2 \mathrm{d}\Gamma \mathrm{d}t = 2\mathrm{Re}\Big(G \int_\Omega z_t (q \cdot \nabla \bar{z}) \mathrm{d}x\Big|_{t=0}^{t=T}\Big) \\ &+ 2\sum_{k,l=1}^d \mathrm{Re} \int_0^T G \int_\Omega q_{k,x_l} \bar{z}_{x_k} z_{x_l} \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^T G \int_\Omega (\mathrm{div} q)\big(|z_t|^2 - |\nabla z|^2\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &- 2\mathrm{Re} \int_0^T G \int_\Omega F(q \cdot \nabla \bar{z})\mathrm{d}x\mathrm{d}t - 2\mathrm{Re} \int_0^T \dot{G} \int_\Omega z_t (q \cdot \nabla \bar{z}) \mathrm{d}\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Beweis. Wir multiplizieren Gleichung (4.11) in $L^2(0,T; L^2(\Omega))$ mit $Gq \cdot \nabla z$. Integriert man den ersten Term partiell bzgl. der Zeitvariable, so folgt
$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega G z_{tt}(q \cdot \nabla \bar{z}) \mathrm{d}x\mathrm{d}t &= \Big(G \int_\Omega z_t (q \cdot \nabla \bar{z})\mathrm{d}x\Big|_{t=0}^{t=T}\Big) \\ &- \int_0^T G \int_\Omega z_t \big(q \cdot \nabla \bar{z}_t\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_0^T \dot{G} \int_\Omega z_t (q \cdot \nabla \bar{z}) \mathrm{d}x\mathrm{d}t, \end{aligned}$$
woraus sich nun wegen $z_t = 0$ auf $(0,\infty) \times \partial\Omega$ mit der Greenschen Formel bzgl. der Ortsvariable angewendet auf den zweiten Term auf der rechten Seite
$$\begin{aligned} \mathrm{Re} \int_0^T G \int_\Omega z_{tt}(q \cdot \nabla \bar{z})\mathrm{d}x\mathrm{d}t &= \mathrm{Re}\Big(G \int_\Omega z_t (q \cdot \nabla \bar{z})\mathrm{d}x\Big|_{t=0}^{t=T}\Big) \\ &+ \tfrac{1}{2} \int_0^T G \int_\Omega |z_t|^2 (\mathrm{div} q)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \mathrm{Re} \int_0^T \dot{G} \int_\Omega z_t (q \cdot \nabla \bar{z})\mathrm{d}x\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{4.13}$$

[103] Johann Carl Friedrich Gauß, 30. April 1777 – 23. Februar 1855.

ergibt. Für den zweiten Term auf der linken Seite von (4.11) folgt nach der Multiplikation mit $Gq \cdot \nabla w$ in $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ mit Lemma 4.18

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\int_0^T G\int_\Omega (q\cdot\nabla\bar{z})\triangle z\mathrm{d}x\mathrm{d}t &= \tfrac{1}{2}\int_0^T G\int_{\partial\Omega}(q\cdot\nu)|\nabla z\cdot\nabla\nu|^2\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t\\ +\tfrac{1}{2}\int_0^T G\int_\Omega(\mathrm{div}q)|\nabla z|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t &- \sum_{k,l=1}^d \mathrm{Re}\int_0^T G\int_\Omega q_{k,x_l}\bar{z}_{x_k}z_{x_l}\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Die obige Identität zusammen mit Gleichung (4.13) liefert nun die Behauptung. □

Mit einer Lokalisierungstechnik lässt sich beweisen:

4.20 Lemma. *Sei $\partial\Omega \in C^2$. Dann existiert ein $h \in C^1(\bar{\Omega},\mathbb{R}^d)$ mit $h(x)=\nu(x)$ für alle $x\in\partial\Omega$.*

Nun können wir die Zulässigkeit für den Beobachtungsoperator C beweisen.

4.21 Satz. *Zu jedem $T>0$ existiert ein $c_T>0$ so, dass für alle $z_0\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ und $z_1\in H_0^1(\Omega)$ die zugehörige klassische Lösung z von (4.7) der Ungleichung*

$$\int_0^T\int_{\partial\Omega}|\nabla z\cdot\nu|^2\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t \le c_T^2\big(\|\nabla z_0\|^2_{(L^2(\Omega))^d}+\|z_1\|^2_{L^2(\Omega)}\big) \tag{4.14}$$

genügt.

Beweis. Sei h wie im Lemma 4.20. Dann liefert Lemma 4.19 angewendet auf z (d.h. $F\equiv 0$), $q=h$ und $G\equiv 1$

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\partial\Omega}|\nabla z\cdot\nu|^2\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t &= 2\mathrm{Re}\int_\Omega z_t(h\cdot\nabla\bar{z})\mathrm{d}x\Big|_{t=0}^{t=T}\\ &+2\sum_{k,l=1}^d\mathrm{Re}\int_0^T\int_\Omega h_{k,x_l}\bar{z}_{x_k}z_{x_l}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_\Omega(\mathrm{div}h)\big(|z_t|^2-|\nabla z|^2\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Der zweite Term auf der rechten Seite lässt sich für alle $t\ge 0$ wie folgt abschätzen:

$$\Big|\sum_{k,l=1}^d\mathrm{Re}\int_\Omega h_{k,x_l}\bar{z}_{x_k}z_{x_l}\mathrm{d}x\Big| \le d\|h\|_{C_b^1(\bar{\Omega})}\int_\Omega|\nabla z|^2\mathrm{d}x.$$

Da sich die verbleibenden Terme analog behandeln lassen, folgt insgesamt

$$\int_0^T\int_{\Gamma_1}|\nabla z\cdot\nu|^2\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t \le \int_0^T\int_{\partial\Omega}|\nabla z\cdot\nu|^2\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&\le M^2 \int_0^T \int_\Omega \big(|z_t|^2 + |\nabla z|^2\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\quad + M^2 \int_\Omega \big(|z_t(0,x)|^2 + |\nabla z(0,x)|^2\big)\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_\Omega \big(|z_t(T,x)|^2 + |\nabla z(T,x)|^2\big)\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

wobei die Konstante $M > 0$ nur von $\|h\|_{C_b^1(\bar{\Omega})}$ abhängt. Unter Beachtung der Energieerhaltungsgleichung (4.9) folgt die Behauptung mit $c_T = M(T+2)^{1/2}$. □

4.22 Bemerkung. Ein analoges Resultat lässt sich nach minimalen Modifikationen auch für den Fall zeigen, dass Ω ein Quader ist, indem man im obigen Beweis $q = x_j e_j$, $j = 1, \dots, d$ wählt, worin e_j den j-ten Vektor in der Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^d$ bezeichnet, bezüglich welcher Ω achsenparallel ist. Dabei ist zu beachten, dass dann lediglich $\Omega \in C^{0,1} \backslash C^2$ gilt.

Damit haben wir bewiesen, dass der Operator C für die von A erzeugte Halbgruppe zulässig ist. Nun wollen wir das Kontrollsystem (4.8) bzw. die Ausgangsgleichung (4.7) auf exakte Beobachtbarkeit untersuchen. Wir zeigen aber zunächst, dass man in Gleichung (4.7) den beobachteten Randteil Γ_1 nicht beliebig wählen kann. Wir verwenden ohne Beweis die folgende unendlich-dimensionale Version des Hautus-Tests.

4.23 Satz (Hautus-Test für Beobachtbarkeit). *Sei A ein schiefadjungierter Operator auf X und sei $C \in L(X_1, Y)$ ein zulässiger Beobachtungsoperator. Das Paar (A, C) ist genau dann exakt beobachtbar, wenn es Konstanten $M, m > 0$ so gibt, dass*

$$
M^2 \|(i\omega \mathrm{id}_X - A)z_0\|_X^2 + m^2 \|C z_0\|_Y^2 \ge \|z_0\|_X^2
$$

für alle $\omega \in \mathbb{R}$ und $z_0 \in D(A)$ gilt.

4.24 Satz. *Sei $d = d_1 + d_2$ mit $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ und sei $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2$, wobei $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ beschränkte Gebiete seien. Existiert eine nichtleere offene Menge $O_1 \subset \Omega_1$ mit $\Gamma_1 \cap \overline{O_1 \times \Omega_2} = \emptyset$, dann ist das Paar (A, C) nicht exakt beobachtbar.*

Beweis. Da Ω_2 beschränkt ist, ist der Dirichlet-Laplaceoperator auf Ω_2 diagonalisierbar. Daher existiert eine Folge $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $\omega_n \searrow -\infty$ für $n \to \infty$, wobei $\psi_n \in L^2(\Omega_2)$ die zum Eigenwert ω_n gehörige Eigenfunktion bezeichnet und $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(\Omega_2)$ bilden. Wir wählen ein festes $f \in C_0^\infty(O_1) \subset C_0^\infty(\Omega_1)$ mit $\|f\|_{L^2(\Omega_1)} = 1$. Für $x \in \mathbb{R}^d$ schreiben wir $x \equiv (x_1, x_2)^T$ mit $x_1 \in \mathbb{R}^{d_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{d_2}$. Ferner seien für $n \in \mathbb{N}$

$$
\varphi_n(x) := \psi_n(x_2) f(x_1), \quad z_n := (\varphi_n, i\omega_n \varphi_n) \text{ für } x \in \Omega.
$$

Die Voraussetzung an Γ_1 liefert

$$Cz_n = \nabla\varphi_n \cdot \nu|_{\Gamma_1} = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Andererseits folgt mit dem Satz von Fubini

$$\|(i\omega_n \mathrm{id}_H - A)z_n\|_H^2 = \|(\omega_n^2 \mathrm{id}_X - A_0)\varphi_n\|_X^2 = \int_\Omega |\psi_n(x_2)\triangle f(x_1)|^2 \mathrm{d}x = \|\triangle f\|_{L^2(\Omega_1)}^2.$$

Die obigen Identitäten sowie die Tatsache

$$\|z_n\|_H \geq \|\varphi_n\|_{X_{1/2}} = |\omega_n|^{1/2}\|\varphi_n\|_X = |\omega_n|^{1/2} \to \infty \text{ für } n \to \infty$$

besagen nun, dass die Bedingung von Satz 4.23 verletzt ist, weshalb das Paar (A, C) nicht exakt beobachtbar ist. □

Zu $x_0 \in \mathbb{R}^d$ betrachten wir das Vektorfeld

$$m(x) := x - x_0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^d$$

und definieren die Menge $\Gamma(x_0) \subset \partial\Omega$ (vgl. Abbildung 10)

$$\Gamma(x_0) := \{x \in \partial\Omega \,|\, m(x) \cdot \nu(x) > 0\}$$

sowie die Zahl

$$r(x_0) := \|m\|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)} = \sup_{x \in \Omega} |m(x)|.$$

Ist Ω ein Lipschitz-Gebiet, so ist $\Gamma(x_0)$ messbar bzgl. des Flächenmaßes auf $\partial\Omega$. Ist $\partial\Omega \in C^1$, so ist $\Gamma(x_0)$ sogar relativ offen.

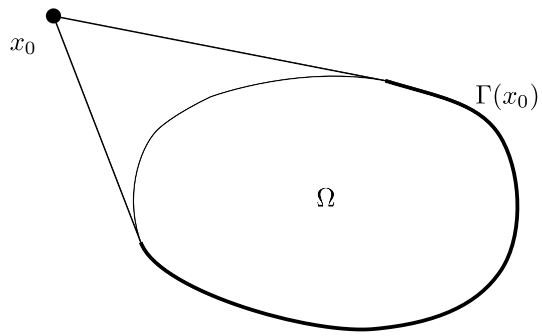

Abbildung 10: Die Menge $\Gamma(x_0)$

4.25 Lemma. *Sei $T > 0$ und seien*

$$z \in C^0([0,T], H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T], H_0^1(\Omega)) \cap C^2([0,T], L^2(\Omega))$$

sowie $F := \Box z$. *Dann gilt*

$$\int_0^T \int_{\partial\Omega} (m\cdot\nu)|\nabla z\cdot\nu|^2 \mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t = \int_0^T \int_\Omega \big(|z_t|^2 + |\nabla z|^2\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ + \mathrm{Re}\Big(\int_\Omega \big(2m\cdot\nabla\bar{z} + (d-1)\bar{z}\big) z_t \mathrm{d}x\Big|_{t=0}^{t=T}\Big) \\ - 2\mathrm{Re}\int_0^T\int_\Omega F(m\cdot\nabla\bar{z})\mathrm{d}x\mathrm{d}t - (d-1)\mathrm{Re}\int_0^T\int_\Omega F\bar{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Beweis. Wir wenden Lemma 4.19 mit $q := m$ und $G \equiv 1$ an. Unter Beachtung von $\operatorname{div} m \equiv d$ und $\nabla m = \mathrm{I}_{d\times d}$ finden wir mit Gleichung (4.12)

$$\int_0^T \int_{\partial\Omega} (m\cdot\nu)|\nabla z\cdot\nu|^2 \mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t = \int_0^T \int_\Omega \big(|z_t|^2 + |\nabla z|^2\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ + (d-1)\int_0^T\int_\Omega \big(|z_t|^2 - |\nabla z|^2\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + 2\mathrm{Re}\int_\Omega (m\cdot\nabla\bar{z})z_t\mathrm{d}x\Big|_{t=0}^{t=T} \\ - 2\mathrm{Re}\int_0^T\int_\Omega F(m\cdot\nabla\bar{z})\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Multipliziert man nun F skalar in $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ mit z, so ergibt sich mit partieller Integration bzgl. t sowie der Greenschen Formel bzgl. x die Identität

$$\int_0^T\int_\Omega \big(|z_t|^2 - |\nabla z|^2\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\int_\Omega z_t\bar{z}\mathrm{d}x\Big|_{t=0}^{t=T} - \mathrm{Re}\int_0^T\int_\Omega F\bar{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Addiert man nun die beiden Gleichheiten auf, so folgt die Behauptung. $\Box$

4.26 Lemma. *Für alle* $z_0 \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ *und* $z_1 \in H_0^1(\Omega)$ *gilt*

$$\Big|\int_\Omega z_1(2m\cdot\nabla z_0 + (d-1)z_0)\mathrm{d}x\Big| \le r(x_0)\big(\|\nabla z_0\|_{(L^2(\Omega))^d} + \|z_1\|^2_{L^2(\Omega)}\big).$$

Beweis. Unter Berücktigigung von

$$\operatorname{div}(\varphi q) = (\nabla\varphi)\cdot q + \varphi\operatorname{div} q \text{ für } \varphi\in H^1(\Omega), v\in C^1(\bar{\Omega},\mathbb{R}^d)$$

ergibt sich

$$\|2m\cdot\nabla z_0 + (d-1)z_0\|^2 = \int_\Omega |2m\cdot\nabla z_0|^2\mathrm{d}x + (d-1)^2\int_\Omega |z_0|^2\mathrm{d}x \\ + 2(d-1)\int_\Omega m\cdot\nabla(|z_0|^2)\mathrm{d}x = \int_\Omega |2m\cdot\nabla z_0|^2\mathrm{d}x + (d-1)^2\int_\Omega |z_0|^2\mathrm{d}x \\ + 2(d-1)\int_\Omega \operatorname{div}(|z_0|^2 m)\mathrm{d}x - 2d(d-1)\int_\Omega |z_0|^2\mathrm{d}x.$$

Wegen $z_0 \equiv 0$ auf $\partial\Omega$ folgt mit dem Satz von Gauß

$$\|2m \cdot \nabla z_0 + (d-1)z_0\|^2_{L^2(\Omega)} = \|2m \cdot \nabla z_0\|^2_{L^2(\Omega)} - (d^2-1)\|z_0\|^2_{L^2(\Omega)},$$

woraus man leicht

$$\|2m \cdot \nabla z_0 + (d-1)z_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \|2m \cdot \nabla z_0\|_{L^2(\Omega)}$$

folgert. Mit Cauchy & Schwarz findet man nun wegen $|m(\cdot)| \leq r(x_0)$ auf $\partial\Omega$

$$\begin{aligned}\Big|\int_\Omega z_1\big(2m \cdot \nabla z_0 + (d-1)z_0\big)\mathrm{d}x\Big| &\leq 2\|z_0\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|m \cdot \nabla z_0\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq r(x_0)\|z_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac{1}{r(x_0)}\|m \cdot \nabla z_0\|^2_{L^2(\Omega)} \leq r(x_0)\big(\|\nabla z_0\|^2_{(L^2(\Omega))^d} + \|z_1\|^2_{L^2(\Omega)}\big).\end{aligned}$$

Dies beendet den Beweis. □

4.27 Satz. *Für ein $x_0 \in \mathbb{R}^d$ gelte $\Gamma(x_0) \subset \Gamma_1$ sowie $T > 2r(x_0)$. Dann ist das Kontrollsystem (4.7) zur Zeit T exakt beobachtbar.*

Beweis. Wir zeigen, dass für (4.7) die Beobachtbarkeitsgleichung gilt. Mit z bezeichnen wir die zu den Anfangsdaten $z_0 \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$, $z_1 \in H^1_0(\Omega)$ gehörige klassische Lösung. Mit der Energieerhaltungsgleichung (4.9), d.h.

$$\int_0^T \int_\Omega \big(|z_t|^2 + |\nabla z|^2\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = T\big(\|\nabla z_0\|^2_{(L^2(\Omega))^d} + \|z_1\|^2_{L^2(\Omega)}\big),$$

folgt mit Lemma 4.25 wegen $F \equiv 0$

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{\partial\Omega} (m \cdot \nu)|\nabla z \cdot \nu|^2 \mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t = T\big(\|\nabla z_0\|_{(L^2(\Omega))^d} + \|z_1\|^2_{L^2(\Omega)}\big) \\ + \operatorname{Re}\Big(\int_\Omega (2m \cdot \nabla \bar{z} + (d-1)\bar{z})z_t \mathrm{d}x\Big|_{t=0}^{t=T}\Big).\end{aligned}$$

Andererseits bekommt man mit Lemma 4.26

$$\begin{aligned}\Big|\int_\Omega (2m \cdot \nabla \bar{z} + (d-1)\bar{z})z_t \mathrm{d}x\Big| &\leq r(x_0)\big(\|\nabla z\|^2_{(L^2(\Omega))^d} + \|z_t\|^2_{L^2(\Omega)}\big) \\ &= r(x_0)\big(\|\nabla z_0\|^2_{(L^2(\Omega))^d} + \|z_1\|^2_{L^2(\Omega)}\big)\end{aligned}$$

und daher

$$\Big|\int_\Omega z_t(2m \cdot \nabla \bar{z} + (d-1)\bar{z})\mathrm{d}x\Big|_{t=0}^{t=T}\Big| \leq 2(r_0)\big(\|\nabla z_0\|^2_{(L^2(\Omega))^d} + \|z_1\|^2_{L^2(\Omega)}\big).$$

Insgesamt folgt wegen $m \cdot \nu \leq 0$ auf $\partial\Omega \backslash \Gamma_1$ sowie $|m \cdot \nu| \leq |m| \leq r(x_0)$ auf Γ_1 die Beobachtbarkeitsungleichung

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} |\nabla z \cdot \nu|^2 \mathrm{d}\Gamma \mathrm{d}t \geq \tfrac{1}{r(x_0)} \int_0^T \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu) |\nabla z \cdot \nu|^2 \mathrm{d}\Gamma \mathrm{d}t$$
$$\geq \tfrac{1}{r(x_0)} \int_0^T \int_{\partial\Omega} (m \cdot \nu) |\nabla z \cdot \nu|^2 \mathrm{d}\Gamma \mathrm{d}t \geq c_T^2 \big(\|\nabla z_0\|^2_{(L^2(\Omega))^d} + \|z_1\|^2_{L^2(\Omega)} \big)$$

mit $c_T^2 := \frac{T - 2r(x_0)}{r(x_0)} > 0$. □

4.28 Bemerkung. Satz 4.27 stellt nur eine hinreichende Bedingung für die exakte Beobachtbarkeit dar. Eine „scharfe" Bedingung für die exakte Beobachtbarkeit – die sogenannte „geometric optics condition" – geht auf einen SIAM Artikel[104] von Bardos, Lebeau und Rauch zurück und besagt: Das System (4.7) ist (im gewissen Sinne) „genau dann" zum Zeitpunkt $T > 0$ exakt beobachtbar, wenn jeder sich mit der Einheitsgeschwindigkeit in Ω bewegende Lichtstrahl nach eventuellen Reflexionen am Rand spätestens zur Zeit T den Randteil Γ_1 erreicht.

4.29 Bemerkung. Ein ähnliches Resultat lässt sich auch für den Fall beweisen, dass das System über eine offene Teilmenge $\omega \subset \Omega$ beobachtet wird, wobei man

$$\{x \in \Omega \,|\, d(x, \Gamma) < \varepsilon\} \subset \bar{\omega} \text{ für ein } \varepsilon > 0$$

für Γ_1 wie in Satz 4.27 voraussetzt. In diesem Fall spricht man von einer „verteilten Beobachtung".

4.3.2. Ein Randsteuerungsproblem

Mit den Notationen des vorangehendes Abschnittes betrachten wir das Kontrollsystem

$$\begin{aligned} y_{tt} - \triangle y &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\ y &= 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_0, \\ y &= u \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_1, \\ y(0, \cdot) = y_0, &\quad y_t(0, \cdot) = y_1 \text{ in } \Omega \end{aligned} \tag{4.15}$$

mit der Steuerung $u \in \mathcal{U} := L^2(0, \infty; U)$, $U := L^2(\Gamma_1)$. Aufgrund der inhomogenen Randbedingungen handelt es sich bei (4.15) um kein Evolutionsproblem auf $H = X_1 \times X_{1/2}$.

[104] Bardos, C., Lebeau, G., Rauch, J. (1992). Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary, SIAM J. Control. Optim., 30, pp. 1024–1065.

Wir betrachten den Extrapolationsraum $H_{-1} \simeq X \times X_{-1/2}$. Es seien $A_{0,-1}$ bzw. A_{-1} die eindeutigen Fortsetzungen von A_0 bzw A auf X_{-1} bzw. H_{-1}. Jede starke Lösung von (4.15) erfüllt

$$\begin{aligned} y_{tt} - A_0(y - Du) &= 0 \text{ in } L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;X), \\ y(0,\cdot) = y_0, &\quad y_t(0,\cdot) = y_1, \end{aligned}$$

während für schwache Lösungen

$$\begin{aligned} y_{tt} - A_{0,-1}y &= A_{0,-1}Du \text{ in } L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;X_{-1}), \\ y(0) = y_0, &\quad y_t(0) = y_1 \end{aligned}$$

gilt. Zu beachten ist, dass die „Randbedingung" in der Definition des Operators A_0 bzw. $A_{0,-1}$ steckt und u durch 0 zu einer $L^2(\partial\Omega)$-Funktion fortgesetzt wird. Dies liefert uns die abstrakte Form von (4.15)

$$\begin{aligned} y_{tt} - A_{0,-1}y &= B_0 u \text{ in } L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;X_{-1}), \\ y(0) = y_0, &\quad y_t(0) = y_1 \end{aligned} \tag{4.16}$$

mit dem Steuerungsoperator

$$B_0 \colon u \mapsto A_{0,-1}Du,$$

wobei u trivial auf $\partial\Omega$ fortgesetzt wird. Wegen $D \in L(L^2(\Gamma_1), L^2(\Omega))$ ist $B \in L(U, X_{-1})$.

Definiert man $\xi := (y, y_t)$, so schreibt sich (4.16) um zu

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= A_{-1}\xi(t) + Bu(t) \text{ für f.a. } t \in (0,\infty), \\ \xi(0) &= \xi_0. \end{aligned} \tag{4.17}$$

wobei $B \colon u \mapsto (B_0 u, 0_{L(X_{-1})})$. Da A_{-1} als schief-adjungierter Operator eine C_0-Gruppe unitärer Operatoren auf H_{-1} erzeugt, besitzt (4.16) zu jedem $u \in \mathcal{U}$ eine eindeutige milde Lösung auf H_{-1}. Wir wollen zeigen, dass diese auch eine schwache bzw. extrapolierte Lösung ist. Hierfür müssen wir beweisen, dass $B \in L(U, H_{-1})$ ein zulässiger Steuerungsoperator ist.

4.30 Lemma. *Der zum Operator $B_0 \in L(U, X_{-1})$ (bzgl. $X_{-1/2}$) duale Operator $B^* \in L(X, U)$ ist gegeben durch*

$$B_0^* z = \tfrac{\partial}{\partial\nu}(A_0^{-1}z) \text{ für alle } z \in X.$$

Beweis. Für $u \in L^2(\partial\Omega)$, $z \in X_1$ gilt

$$\begin{aligned} \langle B_0 u, z\rangle_{X_{-1};X} &= \langle A_{0,-1}Du, z\rangle_{X_{-1};X} \\ &= \langle (-A_{0,-1})^{1/2}Du, (-A_{0,-1})^{1/2}z\rangle_{X_{-1/2}} = \langle Du, z\rangle_X, \end{aligned}$$

da $(-A_{0,-1})^{1/2} \in L(X, X_{-1/2})$ eine Isometrie ist. Hierbei ist X_{-1} als der Dualraum von X bzgl. $X_{-1/2}$ aufzufassen. Zudem bilden die Räume $X \hookrightarrow X_{-1/2} \hookrightarrow X_{-1}$ ein Gelfand-Tripel. Nach Satz 4.13 gilt

$$\langle Du, z \rangle_X = \langle u, \tfrac{\partial}{\partial \nu}(A_0^{-1} z) \rangle_X,$$

woraus sich die Behauptung ergibt. □

4.31 Satz. *B ist ein zulässiger Steuerungsoperator für die von A erzeugte Halbgruppe.*

Beweis. Nach Satz 3.63 ist der Steuerungsoperator B genau dann für die von A erzeugte Halbgruppe zulässig, wenn B^* ein für die von $A^* = -A$ erzeugte Halbgruppe zulässiger Beobachtungsoperator ist, d.h. ω ist eine zulässige Beobachtung des Systems

$$\dot{\eta} = -A_0 \eta, \quad \omega = B^* \eta, \quad \eta(0) = \eta_0 \in H_{-1}$$

was nach der Sustitution $\tau := -t$ mit der Zulässigkeit von

$$\dot{\eta} = A_0 \eta, \quad \omega = B^* \eta, \quad \eta(0) = \eta_0 \in H_{-1}$$

gleichbedeutend ist. Dies ist wiederum dazu äquivalent, dass

$$C := B^* A = (\tfrac{\partial}{\partial \nu}, 0_{L(X)})^T \in L(H_1, U)$$

ein zulässiger Beobachtungsoperator für die von A auf H erzeugte Halbgruppe ist, was nach Satz 4.21 der Fall ist. □

Analog folgt mit Sätzen 3.80 und 4.27:

4.32 Satz. *Für ein $x_0 \in \mathbb{R}^d$ gelte $\Gamma(x_0) \subset \Gamma_1$. Dann ist das Kontrollsystem (4.15) bzw. (4.16) für alle Zeiten $T > 2r(x_0)$ exakt steuerbar.*

4.33 Bemerkung. Auch im Falle einer Neumann-Randsteuerung am Γ_1, d.h. $\frac{\partial y}{\partial \nu} = u$ mit $u \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$, kann man die exakte Steuerbarkeit beweisen, obwohl der Steuerungsoperator formal nicht zulässig ist.

4.4. Die Wärmeleitungsgleichung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes, glatt berandedes Gebiet im Sinne $\Gamma := \partial\Omega \in C^4$. Ferner sei $\omega \subset \Omega$ offen und nichtleer und sei $a \in L^\infty(\Omega)$. Wir betrachten ein Kontrollsystem mit verteilter Steuerung für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} y_t(t,x) - \triangle y(t,x) + a(x)y(t,x) &= \chi_\omega(x)u(t,x) \text{ für } (t,x) \in (0,\infty) \times \Omega, \\ y(t,x) &= 0 \text{ für } (t,x) \in (0,\infty) \times \partial\Omega, \\ y(0,x) &= y_0(x) \text{ für } x \in \Omega, \end{aligned} \tag{4.18}$$

wobei $X := L^2(\Omega)$ der Zustands- und $U := L^2(\omega)$ der Steuerungsraum sind.

Wir definieren $A := \triangle_D \in L(X_1, X)$, wobei $X_1 := D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ mit der Norm $\|\triangle \cdot\|$ versehen ist. Dann erzeugt A eine C_0-Halbgruppe auf X (sogar eine holomorphe Gruppe vom Winkel $\frac{\pi}{2}$) und der Steuerungsoperator $B\colon u \mapsto \begin{cases} u, & \text{in } \omega, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ ist als beschränkter Steuerungsoperator (d.h. $B \in L(U,X)$) zulässig. Wir wollen beweisen, dass das System (4.18) zu jedem Zeitpunkt $T > 0$ Null-steuerbar ist.

4.4.1. Die globale Carleman-Abschätzung

In diesem Abschnitt wollen wir eine globale Carleman[105]-Abschätzung für Gleichung (4.18) zeigen. Bei dieser geht es im Grunde genommen um eine gewichtete Energieabschätzung für klassische Lösungen von

$$\varphi_t - \triangle\varphi = f \text{ in } (0,\infty) \times \Omega, \quad \varphi = 0 \text{ auf } (0,\infty) \times \partial\Omega. \tag{4.19}$$

Mann kan beweisen:

4.34 Lemma. *Es gibt ein $\eta_0 \in C^4(\bar{\Omega})$ mit $\eta_0 > 0$ in Ω, $\eta_0 = 0$ auf $\partial\Omega$ und $\nabla\eta_0 \neq 0$ in $\Omega\backslash\omega$.*

Für $T > 0$ definieren wir $Q_T := (0,T) \times \Omega$ und $\Sigma_T := (0,T) \times \Gamma$. Ferner seien $K_0 := 4\|\eta_0\|_{C^0(\bar{\Omega}}$, $K_1 := 6\|\eta\|_{C^0(\bar{\Omega})}$ und $\lambda > 0$ eine später zu fixierende Konstante. Desweiteren sei $\eta := \eta_0 + K_0$ und seien

$$\alpha(x) := e^{\lambda K_1} - e^{\lambda\eta(x)}, \quad \beta(t,x) := \tfrac{\alpha(x)}{t(T-t)}, \quad \rho(t,x) := e^{\beta(t,x)} \tag{4.20}$$

für $(t,x) \in (0,T) \times \bar{\Omega}$. Es lässt sich leicht nachrechnen:

4.35 Lemma. *Es existieren von Ω und ω abhängige Konstanten $\lambda_0, C_1, C_2 > 0$ so, dass die oben definierte Funktion β für $\lambda \geq \lambda_0$ den folgenden Ungleichungen genügt:*

$$-\sum_{i,j=1}^{d} \beta_{x_i x_j}\beta_{x_i}\beta_{x_j} \geq C_1 \tfrac{\lambda^4 e^{3\lambda\eta(x)}}{t^3(T-t)^3} \textit{ für alle } (t,x) \in Q_T\backslash((0,T)\times\omega), \tag{4.21}$$

[105] Tage Gillis Torsten Carleman, 8. Juli 1892 – 11. Januar 1949.

$$|\triangle\beta|^2 \le \tfrac{C_2\lambda^4 e^{2\lambda\eta(x)}}{t^2(T-t)^2} \text{ für alle } (t,x)\in Q_T, \tag{4.22}$$
$$|\nabla\beta_t\cdot\nabla\beta| \le \tfrac{C_2T\lambda^2 e^{3\lambda\eta(x)}}{t^3(T-t)^3} \text{ für alle } (t,x)\in Q_T, \tag{4.23}$$
$$|\beta_t\triangle\beta| \le \tfrac{C_2T\lambda^2 e^{3\lambda\eta(x)}}{t^3(T-t)^3} \text{ für alle } (t,x)\in Q_T, \tag{4.24}$$
$$|\beta_{tt}| \le \tfrac{C_2T^2\lambda^2 e^{3\lambda\eta(x)}}{t^3(T-t)^3} \text{ für alle } (t,x)\in Q_T. \tag{4.25}$$

Zur $s>0$ und $\varphi\in C^1([0,T],L^2(\Omega))\cap C^0([0,T],H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))$ definiere

$$f_s := \rho^{-s}(\varphi_t - \triangle\varphi) \text{ sowie } \psi := \rho^{-s}\varphi.$$

Dann gilt:

4.36 Lemma. *Es existieren von Ω, ω und T abhängige Konstanten $s_0,\lambda_0,K>0$ so, dass klassiche Lösung φ von (4.19)*

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega\Big(\tfrac{t(T-t)}{s}\big(|\psi_t|^2+|\triangle\psi|^2\big)+\tfrac{s}{t(T-t)}|\nabla\psi|^2+\tfrac{s^3}{t^3(T-t)^3}|\psi|^2\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ \ge K\int_0^T\Big(\|f_s\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_\omega\tfrac{s^3}{t^3(T-t)^3}|\psi|^2\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{4.26}$$

für alle $s\ge s_0$ und $\lambda\ge\lambda_0$ erfüllen.

Beweis. **Schritt 1:** Es gilt

$$\partial_t(e^{s\beta}) = s\beta_t e^{s\beta},\quad \nabla(e^{s\beta}) = se^{s\beta}\nabla\beta,\quad \triangle(e^{s\beta}) = se^{s\beta}\triangle\beta + s^2e^{s\beta}|\nabla\beta|^2$$

und

$$\psi(0+,x)=\psi(T-,x)=\psi_t(0+,x)=\psi_t(T-,x) \text{ für alle } x\in\Omega.$$

Damit folgt

$$\rho^{-s}\big(\partial_t(\rho^s\psi)-\triangle(\rho^s\psi)\big)=f_s$$

und daher

$$M_1\psi+M_2\psi=g_s,\quad g_s=f_s+s(\triangle\beta)\psi \tag{4.27}$$

mit

$$M_1\psi=\psi_t-2s\nabla\beta\cdot\nabla\psi,\quad M_2\psi=s\beta_t\psi-\triangle\psi-s^2|\nabla\beta|^2\psi, \tag{4.28}$$

woraus sich

$$\int_0^T\big(\|M_1\psi\|^2_{L^2(\Omega)}+\|M_2\psi\|^2_{L^2(\Omega)}+2\langle M_1\psi,M_2\psi\rangle_{L^2(\Omega)}\big)\mathrm{d}t=\int_0^T\|g_s\|^2_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}t \tag{4.29}$$

ergibt.

Schritt 2: Wir wollen den gemischten Term $2\langle M_1\psi, M_2\psi\rangle_{L^2(Q_T)}$ abschätzen. Mit (4.28) finden wir

$$2\langle M_1\psi, M_2\psi\rangle_{L^2(Q_T)} = I_1 + I_2 + I_3,$$

wobei

$$I_1 = 2\int_{Q_T} \big(s\beta_t\psi - \triangle\psi - s^2|\nabla\beta|^2\psi\big)\psi_t \mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{4.30}$$

$$I_2 = 4s\int_{Q_T} (\nabla\beta\cdot\nabla\psi)\triangle\psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{4.31}$$

$$I_3 = 4s\int_{Q_T} \big(s^2|\nabla\beta|^2\psi - s\beta_t\psi\big)(\nabla\beta\cdot\nabla\psi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{4.32}$$

Unter Beachtung von $\psi|_{\Sigma_T} \equiv 0$ wenden wir die Greensche Formel auf (4.30) an und finden

$$I_1 = \int_{Q_T} \big(\partial_t|\nabla\psi|^2 - (s^2|\nabla\beta|^2 - s\beta_t)\partial_t|\psi|^2\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

woraus sich nach partieller Integration bzgl. der Zeitvariable

$$I_1 = \int_{Q_T} \big(2s^2\nabla\beta_t\cdot\nabla\beta - s\beta_{tt}\big)|\psi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{4.33}$$

ergibt. Analog bekommen wir mithilfe der Greenschen Formel angewendet auf (4.31)

$$I_2 = 4s\int_{\Sigma_T}(\nabla\beta\cdot\nabla\psi)(\nabla\psi\cdot\nu)\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t - 4s\int_{Q_T}\nabla(\nabla\beta\cdot\nabla\psi)\cdot\nabla\psi\mathrm{d}\mathrm{d}t =: I_{2,1} + I_{2,2}.$$

Da β und ψ konstant auf $\partial\Omega$ sind, lässt sich $I_{2,1}$ wie folgt umschreiben:

$$I_{2,1} = 4s\int_{\Sigma_T}(\nabla\beta\cdot\nu)|\nabla\psi\cdot\nu|^2\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t,$$

während für $I_{2,2}$

$$I_{2,2} = 4s\sum_{i,j=1}^d\int_{Q_T}\beta_{x_ix_j}\psi_{x_i}\psi_{x_j}\mathrm{d}x\mathrm{d}t + 4s\sum_{i,j=1}^d\int_{Q_T}\beta_{x_i}\psi_{x_jx_i}\psi_{x_j}$$

folgt, woraus man mit der Greenschen Formel angewendet auf den hinteren Term

$$I_{2,2} = 4s\sum_{i,j=1}^d\int_{Q_T}\beta_{x_ix_j}\psi_{x_i}\psi_{x_j}\mathrm{d}x\mathrm{d}t + 2s\int_{\Sigma_T}(\nabla\beta\cdot\nu)|\nabla\psi\cdot\nu|^2\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t -$$
$$2s\int_{Q_T}(\triangle\beta)|\nabla\psi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

bekommt. Zusammenfassung liefert

$$I_2 = 2s \int_{\Sigma_T} (\nabla\beta \cdot \nu)|\nabla\psi \cdot \nu|^2 \mathrm{d}\Gamma \mathrm{d}t - 4s \int_{Q_T} \sum_{i,j=1}^{d} \beta_{x_i x_j} \psi_{x_i} \psi_{x_j} \mathrm{d}x\mathrm{d}t +$$
$$2s \int_{Q_T} (\triangle\beta)|\nabla\psi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Wendet man die Greensche Formel auf den zweiten Term in I_3 an

$$4s^2 \int_{Q_T} \beta_t \psi (\nabla\beta \cdot \nabla\psi) \mathrm{d}x\mathrm{d}t = -2s^2 \int_{Q_T} \big(\nabla\beta_t \cdot (\nabla\beta)|\psi|^2 + \beta_t(\triangle\beta)|\psi|^2\big) \mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

so folgt

$$I_3 = -2s^3 \int_{Q_T} |\nabla\beta|^2 |\psi|^2 \triangle\beta \mathrm{d}x\mathrm{d}t - 4s^3 \sum_{i,j=1}^{d} \int_{Q_T} \beta_{x_i x_j} \beta_{x_i} \beta_{x_j} |\psi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t +$$
$$2s^2 \int_{Q_T} \nabla\beta_t \cdot (\nabla\beta)|\psi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t + 2s^2 \int_{Q_T} \beta_t (\triangle\beta)|\psi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Insgesamt haben wir gezeigt:

$$2\langle M_1\psi, M_2\psi\rangle_{L^2(Q_T)} = J_1 + J_2 + J_3 - 4s \sum_{i,j=1}^{d} \int_{Q_T} \beta_{x_i x_j} \psi_{x_i} \psi_{x_j} \mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

wobei

$$J_1 = -4s^3 \sum_{i,j=1}^{d} \int_{Q_T} \beta_{x_i x_j} \beta_{x_i} \beta_{x_j} |\psi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$
$$J_2 = 2s \int_{\Sigma_T} (\nabla\beta \cdot \nu)|\nabla\psi \cdot \nu|^2 \mathrm{d}\Gamma \mathrm{d}t,$$
$$J_3 = 2s^2 \int_{Q_T} \big(2\nabla\beta_t \cdot \nabla\beta + \beta_t \triangle\beta\big)|\psi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t - s \int_{Q_T} \beta_{tt} |\psi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Gleichung (4.21) liefert nun die Existenz der Konstanten $C_1, \lambda_0 > 0$, für welche

$$J_1 \geq C_1 s^3 \lambda^4 \int_{Q_T \setminus ((0,T)\times\omega)} \tfrac{e^{3\lambda\eta(x)}}{t^3(T-t)^3} |\psi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \text{ für alle } \lambda \geq \lambda_0 \text{ gilt.}$$

Andererseits folgt mit Lemma 4.34

$$\nabla\beta \cdot \nu = -\frac{1}{t(T-t)} \lambda (\nabla\eta \cdot \nu) e^{\lambda\eta} \geq 0 \text{ für alle } (t,x) \in \Sigma_T,$$

was die Nichtnegativität von J_2 nach sich zieht. Desweiteren folgt mit (4.21) die Existenz einer Konstanten $C_3 > 0$ so, dass

$$|J_3| \leq C_3 s^3 \lambda^4 \int_{Q_T} \tfrac{e^{3\lambda\eta(x)}}{t^3(T-t)^3} |\psi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

für alle $\lambda \geq \lambda_0$ und alle hinreichend großen $s > 0$ gilt. Damit existiert eine Konstante $C > 0$ so, dass

$$\begin{aligned}
2\langle M_1\psi, M_2\psi\rangle_{L^2(Q_T)} \geq Cs^3\lambda^4 \int_{Q_T} \tfrac{e^{3\lambda\eta(x)}}{t^3(T-t)^3} |\psi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t - Cs^3\lambda^4 \int_{(0,T)\times\omega} \tfrac{e^{3\lambda\eta(x)}}{t^3(T-t)^3} |\psi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t - \\
4s \sum_{i,j=1}^{d} \int_{Q_T} \beta_{x_i x_j} \psi_{x_i} \psi_{x_j} \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \\
2 \int_{Q_T} \big(s(\triangle\beta)|\nabla\psi|^2 - s^3(\triangle\beta)|\nabla\beta|^2|\psi|^2\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

gilt. Zusammen mit Gleichung (4.29) liefert dies

$$\begin{aligned}
\|M_1\psi\|^2_{L^2(\Omega)} + \|M_2\psi\|^2_{L^2(Q_T)} + Cs^3\lambda^4 \int_{Q_T} \lambda^4 \int_{Q_T} \tfrac{e^{3\lambda\eta(x)}}{t^3(T-t)^3} |\psi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leq C\|g_s\|^2_{L^2(Q_T)} \\
+ Cs^3\lambda^4 \int_{(0,T)\times\omega} \tfrac{e^{3\lambda\eta(x)}}{t^3(T-t)^3} |\psi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t - 4s \sum_{i,j=1}^{d} \int_{Q_T} \beta_{x_i x_j} \psi_{x_i} \psi_{x_j} \mathrm{d}x\mathrm{d}t + 2S
\end{aligned}$$

mit

$$S = \int_{Q_T} \big(s(\triangle\beta)|\nabla\psi|^2 - s^3(\triangle\beta)|\nabla\beta|^2|\psi|^2\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Schritt 3: Wir wollen das Funktional S abschätzen. Nach Gleichungen (4.27) und (4.28) gilt

$$\begin{aligned}
S = \int_{Q_T} s(\triangle\beta)|\nabla\psi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \\
s \int_{Q_T} (\triangle\beta)\psi\big(f_s - M_1\psi - s\beta_t\psi + \triangle\psi + s^2(\nabla\beta)\psi + s(\triangle\beta)\psi\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

woraus sich nach einfachen Umformungen

$$\begin{aligned}
S = s \int_{Q_T} (\triangle\beta)\nabla\cdot(\psi\nabla\psi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - s^2 \int_{Q_T} \beta_t(\triangle\beta)|\psi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \\
s \int_{Q_T} (f_s - M_1\psi + s(\triangle\beta)\psi)(\triangle\beta)\psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

ergibt. Nach zweifacher Anwendung der Greenschen Formel auf den ersten Term auf der rechten Seite folgt

$$S = s\int_{Q_T}(\triangle^2\beta)|\psi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t - s^2\int_{Q_T}\beta_t(\triangle\beta)|\psi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t +$$
$$s\int_{Q_T}(f_s - M_1\psi + s(\triangle\beta)\psi)(\triangle\beta)\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Also gilt die Abschätzung

$$|S| \le \tfrac{1}{4}\|M_1\psi\|^2_{L^2(Q_T)} + 4s^2\int_{Q_T}(\triangle\beta)^2|\psi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \|f_s\|^2_{L^2(Q_T)} +$$
$$s^2\int_{Q_T}\beta_t(\triangle\beta)|\psi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \tfrac{s}{2}\int_{Q_T}(\triangle^2\beta)|\psi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Ferner existieren Konstanten $\lambda_0, C > 0$ so, dass für $\lambda \ge \lambda_0$ und $s \ge C(T+T^2)$ wegen

$$|\triangle^2\beta| = \tfrac{1}{t(T-t)}|\triangle^2 e^{\lambda\eta}| \le \tfrac{C}{t(T-t)}\lambda^4 e^{3\lambda\eta} \text{ und } \tfrac{1}{t(T-t)} \le \tfrac{T^4}{t^3(T-t)^3} \text{ für alle } t \in (0,T)$$

die Ungleichung

$$|S| \le \tfrac{1}{2}\int_0^T\left(\|M_1\psi\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f_s\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\mathrm{d}t + Cs^2\lambda^4\int_0^T\int_\Omega \tfrac{e^{3\lambda\eta}}{t^3(T-t)^3}|\psi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

gilt. Nach der Definition von M_2 in Gleichung (4.28) folgt

$$\tfrac{1}{s}\int_{Q_T}t(T-t)e^{-\lambda\eta}|\triangle\psi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \tfrac{1}{s}\int_{Q_T}t(T-t)e^{-\lambda\eta}\left(s\beta_t - M_2\psi - s^2|\nabla\beta|^2\psi\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Daher gilt für hinreichend große s und λ die Abschätzung

$$\tfrac{1}{s}\int_{Q_T}t(T-t)e^{-\lambda\eta}|\triangle\psi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le \tfrac{1}{2}\|M_2\psi\|^2_{L^2(Q_T)} + Cs^3\lambda^4\int_{Q_T}\tfrac{e^{3\lambda\eta}}{t^3(T-t)^3}|\psi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t +$$
$$CsT^2\int_{Q_T}t^3(T-t)^3|\psi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Damit folgt

$$\|M_1\psi\|^2_{L^2(Q_T)} + \tfrac{1}{s}\int_{Q_T}t(T-t)e^{-\lambda\eta}|\triangle\psi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + Cs^3\lambda^4\int_{Q_T}\tfrac{e^{3\lambda\eta}}{t^3(T-t)^3}|\psi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
$$\le C\|g_s\|^2_{L^2(Q_T)} + Cs^3\lambda^4\int_{(0,T)\times\omega}\tfrac{e^{3\lambda\eta}}{t^3(T-t)^3}|\psi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t - 4s\sum_{i,j=1}^{d}\int_{Q_T}\beta_{x_ix_j}\psi_{x_i}\psi_{x_j}\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

für $s \geq CT(1+T)$ und $\lambda \geq \lambda_0$, Um die hinteren zwei Terme auf der linken Seite abzuschätzen, finden wir mit Greenscher Formel und elementaren Umformungen

$$\begin{aligned}2s\lambda^2 \int_0^T \int_\Omega \tfrac{e^{\lambda\eta}}{t(T-t)} |\nabla\psi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t &= -2\int_0^T \int_\Omega \Big(\tfrac{\sqrt{t(T-t)}}{\sqrt{s}} e^{-\lambda\eta/2} \triangle\psi\Big)\Big(\tfrac{s^{3/2}\lambda^2 e^{3\lambda\eta/2}}{t^{3/2}(T-t)^{3/2}}\psi\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &+ s\lambda^3 \int_0^T \int_\Omega \tfrac{e^{\lambda\eta}}{t(T-t)} (\triangle\psi)|\psi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t + s\lambda^4 \int_0^T \int_\Omega \tfrac{e^{\lambda\eta}}{t(T-t)} |\nabla\eta|^2|\psi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\leq \tfrac{1}{s} \int_0^T \int_\Omega t(T-t)e^{-\lambda\eta}|\triangle\psi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t + Cs^3\lambda^4 \int_0^T \int_\Omega \tfrac{e^{3\lambda\eta}}{t^3(T-t)^3} |\psi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Unter Benutzung der Definition von β ergibt sich ferner

$$\beta_{x_i x_j}\psi_{x_i}\psi_{x_j} \leq C\lambda \tfrac{e^{\lambda\eta}}{t(T-t)} |\nabla\psi|^2.$$

Damit können wir abschätzen

$$\begin{aligned}\|M_1\psi\|^2_{L^2(Q_T)} + \tfrac{1}{s}\int_{Q_T} t(T-t)e^{-\lambda\eta}|\triangle\psi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t + Cs^3\lambda^4 \int_{Q_T} \tfrac{e^{3\lambda\eta}}{t^3(T-t)^3}|\psi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ \leq C\|g_s\|^2_{L^2(Q_T)} + Cs^3\lambda^4 \int_{(0,T)\times\omega} \tfrac{e^{3\lambda\eta}}{t^3(T-t)^3}|\psi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{4.34}$$

für $s \geq CT(1+T)$. Mit (4.28) findet man

$$\frac{1}{s}\int_{Q_T} t(T-t)|\psi_t|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leq C\|M_1\psi\|^2_{L^2(Q_T)} + Cs\int_{Q_T} \tfrac{|\nabla\psi|^2}{t(T-t)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{4.35}$$

Fasst man nun (4.34) und (4.35) zusammen, so folgt die Behauptung. □

4.37 Satz (Carleman-Abschätzung)**.** *Sei $\omega \subset \Omega$ offen und nichtleer. Dann existieren $\alpha \in C^4(\bar{\Omega})$ sowie $C_0, \lambda_0 > 0$, welche nur von Ω, ω und T abhängen, so, dass für alle*

$$\varphi \in C^1([0,T], L^2(\Omega)) \cap C^0([0,T], H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega))$$

und $s \geq s_0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}&\int_0^T \int_\Omega e^{-\frac{2s\alpha}{t(T-t)}} \Big(\tfrac{s}{t(T-t)}|\nabla\varphi|^2 + \tfrac{s^3}{t^3(T-t)^3}|\varphi|^2\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\qquad \leq C_0\Big(\int_0^T \int_\Omega e^{-\frac{2s\alpha}{t(T-t)}}|\varphi_t - \triangle\varphi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + s^3\int_0^T \int_\omega \frac{e^{-\frac{2s\alpha}{t(T-t)}}}{t^3(T-t)^3}|\varphi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big)\end{aligned}$$

gilt.

Beweis. Seien $\lambda, s > 0$ hinreichend groß. Nach (4.20) gilt

$$\nabla\psi = e^{-s\beta}(\nabla\varphi - s\varphi\nabla\beta),$$

woraus sich wegen $|a - sb|^2 \geq \frac{a^2}{2} - s^2b^2$

$$\begin{aligned} s\int_0^T \tfrac{1}{t(T-t)}|\nabla\psi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t &= s\int_0^T \tfrac{e^{-2s\beta}}{t(T-t)}|\nabla\varphi - s\varphi\nabla\beta|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\geq \tfrac{s}{2}\int_0^T\int_\Omega \tfrac{e^{-2s\beta}}{t(T-t)}|\nabla\varphi|^2 - s^3\int_0^T \tfrac{e^{-2s\beta}}{t(T-t)}|\nabla\beta|^2|\varphi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\geq \tfrac{s}{2}\int_0^T \tfrac{e^{-2s\beta}}{t(T-t)}|\nabla\varphi|^2 - K_1 s^3\int_0^T\int_\Omega \tfrac{e^{-2s\beta}}{t^3(T-t)^3} \mathrm{d}x\mathrm{d}t \end{aligned}$$

für ein $K_1 > 0$ ergibt. Damit folgt für alle $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2K_1})$

$$\begin{aligned} &\varepsilon s\int_0^T \tfrac{1}{t(T-t)}|\nabla\psi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t + s^3\int_0^T\int_\Omega \tfrac{1}{t^3(T-t)^3}|\psi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\qquad = \varepsilon s\int_0^T \tfrac{1}{t(T-t)}|\nabla\psi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t + s^3\int_0^T\int_\Omega \tfrac{e^{-2s\beta}}{t^3(T-t)^3}|\varphi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\qquad \geq \tfrac{\varepsilon s}{2}\int_0^T \tfrac{e^{-2s\beta}}{t(T-t)}|\nabla\varphi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \tfrac{s^3}{2}\int_0^T\int_\Omega \tfrac{e^{-2s\beta}}{t^3(T-t)^3}|\varphi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Zusammen mit Lemma 4.36 impliziert dies die Behauptung. □

4.4.2. Null-Steuerbarkeit und Terminale Beobachtbarkeit

Wir betrachten ein verteiltes Beobachtungsproblem für die Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{aligned} z_t(t,x) - \triangle z(t,x) + a(x)z(t,x) &= 0 \text{ für } (t,x) \in (0,\infty)\times\Omega, \\ z(t,x) &= 0 \text{ für } (t,x) \in (0,\infty)\times\partial\Omega, \\ w(t,x) &= z(t,x) \text{ für } (t,x) \in (0,\infty)\times\omega, \\ z(0,x) &= z_0(x) \text{ für } x \in \Omega, \end{aligned} \tag{4.36}$$

wobei $X := L^2(\Omega)$ der Zustands- und $Y := L^2(\omega)$ der Beobachtungsraum ist. Mit $A := \triangle_D$ und dem Beobachtungsoperator $C \in L(X,Y)$, $C\colon z \mapsto z|_\omega$ schreibt sich (4.36) zu

$$z_t = Az \text{ in } (0,\infty), \quad w = Cz \text{ in } (0,\infty), \quad z(0) = z_0.$$

Nun ist $A^* = -A^*$ sowie $B^* = C$, denn

$$\langle Bu, y\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\omega u\bar{y}|_\omega \mathrm{d}x = \langle u, y|_\omega\rangle_{L^2(\omega)} = \langle u, B^*y\rangle_{L^2(\omega)}.$$

Also handelt es sich bei (4.36) um das zu (4.18) adjungierte Kontrollsystem. Aufgrund der Zulässigkeit des Kontrolloperators B ist auch der Beobachtungsoperator C zulässig.

4.38 Satz. *Das Kontrollsystem (4.36) ist zu jedem Zeitpunkt $T > 0$ terminal beobachtbar, d.h. es gibt ein $c_T > 0$ so, dass für alle Anfangsdaten $z_0 \in L^2(\Omega)$ die zugehörige extrapolierte Lösung die Ungleichung*

$$\int_0^T \|Cz\|_Y^2 \mathrm{d}t = \int_0^T \int_\omega |z(t,x)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \geq c_T^2 \int_\Omega |z(T,x)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

erfüllt.

Beweis. Aufgrund der Dichtheit genügt es, die Abschätzung für $\varphi \in C^2(\bar{Q}_T)$ zu zeigen. Nach Satz 4.37 existieren $s_1, C_0 > 0$ so, dass für alle $s \geq s_1$

$$\int_{Q_T} e^{-\frac{2s\alpha}{t(T-t)}} \tfrac{s^3|\varphi|^2}{t^3(T-t)^3} \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leq C_0 \Big(\int_{(0,T)\times\omega} e^{-\frac{2s\alpha}{t(T-t)}} \tfrac{|\varphi|^2}{t^3(T-t)^3} \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{Q_T} e^{-\frac{2s\alpha}{t(T-t)}} |a\varphi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \Big)$$

gilt. Damit existieren $s_2, C_1 > 0$ so, dass man für alle $s \geq s_2$

$$\int_{Q_T} e^{-\frac{2s\alpha}{t(T-t)}} \tfrac{|\varphi|^2}{t^3(T-t)^3} \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leq C_1 \int_{(0,T)\times\omega} e^{-\frac{2s\alpha}{t(T-t)}} \tfrac{|\varphi|^2}{t^3(T-t)^3} \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

abschätzen kann. Ferner existieren Konstanten $C_2, C_3 > 0$ so, dass

$$\frac{e^{-\frac{2s\alpha}{t(T-t)}}}{t^3(T-t)^3} \geq C_2 \text{ für alle } (t,x) \in (\tfrac{T}{4}, \tfrac{3T}{4}) \times \Omega,$$
$$\frac{e^{-\frac{2s\alpha}{t(T-t)}}}{t^3(T-t)^3} \leq C_3 \text{ für alle } (t,x) \in Q_T$$

gilt. Damit existiert ein $C_4 > 0$ mit

$$\int_{(T/4,3T/4)\times\Omega} |\varphi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leq C_4 \int_{(0,T)\times\omega} |\varphi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Da A eine C_0-Halbgruppe erzeugt, existiert eine Konstante $C_5 > 0$ so, dass

$$\|y(T,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_5 \|y(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \text{ für alle } t \in (\tfrac{T}{4}, \tfrac{3T}{4}),$$

woraus sich nun

$$\|y(T,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \tfrac{2}{T} \int_{(T/4,3T/4)\times\Omega} |\varphi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

und damit auch die Behauptung ergeben. □

Als Korollar haben wir mit Satz 3.80:

4.39 Satz. *Das Kontrollsystem (4.18) ist zu jedem Zeitpunkt $T > 0$ (exakt) Nullsteuerbar.*

Literatur

[1] R. A. Adams, *Sobolev spaces*, Pure and Applied Mathematics, 65, Academic Press, New York-London (1975).

[2] W. Arendt, C. J.K. Batty, M. Hieber, F. Neubrander, *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*, Monographs in Mathematics, 96, Birkhäuser Basel – Boston – Berlin (2001).

[3] Y. Chitour, E. Trélat, *Advanced Topics in Control Systems Theory*, Chapter „Controllability of partial differential equations", Lecture Notes in Control and Information Sciences 328, pp. 171–198 (2006).

[4] H. W. Knobloch, H. Kwakernaak, *Lineare Kontrolltheorie*, Springer-Verlag Berlin – Heidelberg (1985).

[5] I. Lasiecka, R. Triggiani, *Control theory for partial differential equations: Continuous and approximation theories I. Abstract Parabolic Systems*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 74 (2010).

[6] I. Lasiecka, R. Triggiani, *Control theory for partial differential equations: Continuous and approximation theories II. Abstract Hyperbolic-Like Systems over a Finite Time Horizon*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 75 (2010).

[7] R. R. Mohler, C. N. Shen, *Optimal Control of Nuclear Reactors*, Academic Press, New York – London (1970).

[8] F. Tröltzsch, *Optimal Control of Partial Differential Equations. Theory, Methods and Applications*, Graduate Studies in Mathematics, 112 (2010).

[9] M. Tucsnak, G. Weiss, *Observation and Control for Operator Semigroups*, Birkhäuser Advanced Texts, Birkhäuser Basel – Boston – Berlin (2009).

[10] T. A. Weber, *Optimal Control Theory with Applications in Economics*, Massachusetts Institute of Technology (2011).

[11] J. Zabczyk, *Mathematical Control Theory: An Introduction*, Systems & Control: Foundations & Applications, Birkhäuser Boston (1992).