Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Michael Pokojovy

29. Oktober 2010

Mathematik für Physiker I

2. Übungsblatt

Aufgabe 2.1 Seien f und g zwei differenzierbare Funktionen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$. Beweisen Sie:

a) $(f \cdot g)'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$, $z \in \mathbb{C}$,
b) $(f(g(z)))' = f'(g(z)) \cdot g'(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

Leiten Sie daraus die Quotientenregel $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{g^2(z)}$, $z \in \mathbb{C}$ mit $g(z) \neq 0$, her.

Hinweis: Der Beweis funktioniert genauso wie im Reellen.

Aufgabe 2.2 Beweisen Sie für alle $z \in \mathbb{C}$ die Identitäten

a) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$,
b) $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$.

Zeigen Sie:

c) $|e^{ix}| = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
d) die Funktion $z \mapsto \sin z$ ist auf $\mathbb{C}$ unbeschränkt.

Aufgabe 2.3 Zeigen Sie, dass die Abbildung $f(z) = |z|^2$, $z \in \mathbb{C}$, in $z = 0$ differenzierbar mit $f'(0) = 0$ und sonst nirgends differenzierbar ist.

Aufgabe 2.4 Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ heißen n-te Einheitswurzeln.

a) Lösen Sie die Gleichung $z^n = 1$. Wieviele Lösungen und mit welchen Vielfachheiten gibt es?
b) Zeichnen Sie diese in der komplexen Ebene für $n = 3, 4, 5$.
c) Berechnen Sie die Summe und das Produkt aller n-ten Einheitswurzeln.

Abgabe: Freitag, 5. November 2010, in der Vorlesung.