Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Michael Pokojovy

5. November 2010

Mathematik für Physiker I

3. Übungsblatt

Aufgabe 3.1 a) Seien $z = x + iy \in \mathbb{C}$ $(x, y \in \mathbb{R})$ und $\varphi \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die komplexe Zahl $e^{i\varphi}z$ und der Vektor $R(\varphi)\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ im geometrischen Sinne übereinstimmen, wobei $R(\varphi)$ die in der Vorlesung definierte Drehmatrix zum Winkel φ bezeichnet.

b) Gegeben sei ein beliebiges Viereck in der Ebene. Auf jeder Seite errichten wir nach außen ein Quadrat. Die Mittelpunkte der Quadrate benennen wir der Reihe nach mit X, Y, Z, U. Beweisen Sie, dass die Strecken XZ und YU gleichlang sind und aufeinander senkrecht stehen.

Hinweis: Stellen Sie die Eckpukte des Vierecks als komplexe Zahlen dar. Verwenden Sie die Teilaufgabe a) zur Rotation jeweiliger Kanten, um den Mittelpunkt des zugehörigen Quadrats zu bestimmen.

Aufgabe 3.2 Seien A, B, C, D vier verschiedene Punkte in der Ebene. Zeigen Sie, dass

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| \geq |AC| \cdot |BD|.$$

Hinweis: Formen Sie den Ausdruck $(B-A)(D-C) + (B-C)(D-A)$ geschickt um und wenden Sie die Dreiecksungleichung auf das Resultat an!

Aufgabe 3.3 a) Gegeben sei ein regelmäßiges Fünfeck (alle Kanten gleichlang, alle Winkel gleichgroß). $(G, \circ)$ sei die Gruppe aller Kongruenzabbildungen (endliche Verknüpfung von Drehungen, Spiegelungen, Verschiebungen) dieses Fünfecks auf sich, wobei die Operation $\circ$ die Nacheinanderausführung bezeichnet. Wieviele Elemente hat die Gruppe $(G, \circ)$?

b) Wieviele Elemente hat die analoge Gruppe der Abbildungen, die einen Würfel auf sich abbilden?

c) Zeigen Sie, dass $(S^1, \cdot)$ eine Gruppe ist, wobei $S^1 \subset \mathbb{C}$ die Einheitssphäre und $\cdot$ die übliche komplexe Multiplikation sind.

Aufgabe 3.4 Wir schauen uns Spiegelungen im $\mathbb{R}^2$ an.

a) Gesucht ist die Abbildungsmatrix für die Spiegelung an der Gerade $x_1 - x_2 = 0$.

b) Welche Bewegung erhalten Sie, wenn Sie nach der Spiegelung aus a) zusätzlich noch eine Spiegelung an der Gerade $x_1 = 0$ durchführen? Was ist die zugehörige Abbildungsmatrix dieser zweiten Spiegelung bzw. der zusammengesetzten Abbildung? Welcher Zusammenhang fällt Ihnen auf?

Abgabe: Freitag, 12. November 2010, in der Vorlesung.