Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Michael Pokojovy

19. November 2010

Mathematik für Physiker I

5. Übungsblatt

Aufgabe 5.1 a) Sind die Vektoren $(1,3,0)', (2,3,1)', (5,9,2)'$ des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ linear abhängig?

b) Zeigen Sie, dass die Vektoren $u_1 = \binom{2+i}{1+i}$ und $u_2 = \binom{1-i}{4-3i}$ ein Erzeugendensystem des $\mathbb{C}$-Vektorraumes $\mathbb{C}^2$ bilden.

c) Sei $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) := \{f \mid f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ der Vektorraum aller reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Teilmenge $\{x \mapsto x-1, x \mapsto x^2+7x+3\}$ von $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ linear unabhängig ist.

Aufgabe 5.2 Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{N}$. Zu $x \in \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$\|x\|_p := \Big(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\Big)^{1/p}, \quad \|x\|_\infty := \max_{k=1,\ldots,n} |x_k|.$$

Beweisen Sie:

a) $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_\infty$ sind Normen auf $\mathbb{R}^n$.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die Minkowski-Ungleichung verwenden: $\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$, $x, y \in \mathbb{R}^n$.

b) $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_\infty$ sind äquivalent, d.h. es existieren zwei von n und p abhängige Konstanten $c_1, c_2 > 0$ derart, dass

$$c_1\|x\|_\infty \le \|x\|_p \le c_2\|x\|_\infty$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Aufgabe 5.3 Zeigen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion:

a) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, $n \in \mathbb{N}$,
b) $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^k$, $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{C}$,
c) $2^n \ge n^2$, $n \in \mathbb{N}_{\ge 4} = \{4, 5, 6, \ldots\}$.

Aufgabe 5.4 a) Für n verschiedene Zahlen $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ definieren wir die n Funktionen

$$\delta_{x_k}\colon \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(x_k) \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Die Funktionen δ_{x_k}, $k = 1, \ldots, n$, gehören zum Raum $\mathcal{F}(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\mathbb{R})$. Beweisen Sie, dass $\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_n}$ linear unabhängig sind und dass $\dim\{\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_n}\} = n$ gilt.

b) Eine Funktion $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ heißt beschränkt, wenn es eine Konstante C_f so gibt, dass die Abschätzung $|f(x)| \le C_f$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Die Menge aller beschränkten Funktionen in $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ bezeichnen wir mit $\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ein Untervektorraum von $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist und dass $\dim \mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \infty$ gilt.

Abgabe: Freitag, 26. November 2010, in der Vorlesung.