Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Michael Pokojovy

26. November 2010

Mathematik für Physiker I

6. Übungsblatt

Aufgabe 6.1 Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine symmetrische Matrix, also $A' = A$. Wir definieren eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

gemäß $\langle u, v\rangle := \langle u, Av\rangle_{\mathbb{R}^2} = \sum_{j,k=1}^{2} u_j a_{jk} v_k$, wobei $u, v \in \mathbb{R}^2$ Spaltenvektoren seien. Zeigen Sie:

a) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist $\mathbb{R}$-bilinear, d.h. $\mathbb{R}$-linear im ersten Faktor und $\mathbb{R}$-linear im zweiten Faktor.

b) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist symmetrisch (also $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$).

Untersuchen Sie, ob sich ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ ergibt, wenn

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 6.2 Sei $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass $\{x \mapsto e^{ikx} \mid k = 0, \ldots, n\}$ eine Menge linear unabhängiger Funktionen in $\mathcal{F}([0, 2\pi], \mathbb{C})$ ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\{x \mapsto e^{ikx} \mid k = 0, \ldots, n\}$ ein Orthogonalsytem bzgl. des Skalarprodukts $(u, v) \mapsto \langle u, v\rangle = \int_0^{2\pi} u(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x$ bilden.

Aufgabe 6.3 Arbeiten Sie den Beweis des Satzes von Steinitz aus!

Aufgabe 6.4 a) Wenden Sie das Orthonormalisierungsverfahren von Gram & Schmidt auf die Vektoren $(1, -1, 1)', (1, 0, 1)', (1, 1, 2)'$ an.

b) Es sei $R \subset \mathbb{R}^4$ derjenige dreidimensionale affine Raum, der durch die Punkte $(4, 0, 0, 0)'$, $(0, 3, 0, 0)'$, $(0, 0, 2, 0)'$ und $(0, 0, 0, 1)'$ verläuft. Wie weit ist R vom Punkt $(1, 3, 2, 5)'$ entfernt?

c) Bestimmen Sie mit den Mitteln aus Abschnitt 2.3.2 die beste Approximation im quadratischen Sinne der Funktion $x \mapsto \frac{1}{2}\exp x$ durch eine lineare Funktion $x \mapsto ax + b$ auf dem Intervall $[0, 1]$.

Abgabe: Freitag, 3. Dezember 2010, in der Vorlesung.