Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Michael Pokojovy

3. Dezember 2010

Mathematik für Physiker I

7. Übungsblatt

Aufgabe 7.1 Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ein Körper und seien $A \in \mathbb{K}^{n,m}$, $B \in \mathbb{K}^{m,l}$ Matrizen, $n, m, l \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

a) Gilt $Ax = 0_{\mathbb{K}^n}$ für alle $x \in \mathbb{K}^m$, so ist $A = 0_{\mathbb{K}^{n,m}}$.

b) Es gilt $(AB)^* = B^* A^*$.

c) Es gilt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, falls $n = m = l$ und A, B invertierbar sind.

Aufgabe 7.2 a) Bestimmen Sie die Lösung $(x(t), y(t), z(t))'$ des folgenden Gleichungssystems für $t > 0$:

$$\begin{aligned} t^2x + y + z &= t, \\ tx + t^2y - t^2z &= -t^6, \\ x - ty - t^4z &= t^2. \end{aligned}$$

Gegen welchen Grenzwert strebt die Lösung für $t \to 0$? Wie lautet die Lösung für $t = 0$?

b) Bestimmen Sie die Koeffizienten aller Polynome, dessen Grade nicht größer als fünf ist, welche an den Stellen $x = -2, -1, 0, 1$ und 2 in dieser Reihenfolge die Werte $74, 12, 4, 2$ und -18 annehmen. Geben Sie ein solches Polynom vierten Grades an.

Aufgabe 7.3 Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme:

a) $$\begin{aligned} 5x - 4y + 6z &= 7, \\ 2x + 3y - 2z &= 4, \\ 9x + 2y + 2z &= 12, \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 5x - 2y + 3z &= 19, \\ 2x + 2y - 4z &= -6, \\ -2x + 3y + z &= -12. \end{aligned}$$

Aufgabe 7.4 Sei $n \in \mathbb{N}$. $P_n = \{p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k,\ a_k \in \mathbb{R}, k = 0, \ldots, n\}$ bezeichne den Vektorraum aller reellen Polynome, dessen Grade n nicht übersteigt. Desweiteren seien folgende Abbildungen gegeben:

1) $D\colon P_n \to P_{n-1}$, $p \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p$ (Differentiation),

2) $I\colon P_{n-1} \to P_n$, $p \mapsto \int_0^{\cdot} p(\xi)\mathrm{d}\xi$ (Integration),

3) $T_{x_0}\colon P_n \to P_n$, $p \mapsto p(\cdot - x_0)$ für ein beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ (Translation).

a) Zeigen Sie, dass die Abbildungen D, I und T_{x_0} linear sind.

b) Geben Sie jeweils durch geschickte Basiswahl eine möglichst einfache Matrixdarstellung der linearen Abbildungen D, I und T_{x_0} an.

Hinweis: Im Ausgangs- und Zielvektorraum muss nicht zwingend die gleiche Basis gewählt werden!

Abgabe: Freitag, 10. Dezember 2010, in der Vorlesung.