Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Michael Pokojovy

10. Dezember 2010

# Mathematik für Physiker I

## 8. Übungsblatt

**Aufgabe 8.1** Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ -2\lambda x_1 + 9x_2 + \lambda x_3 &= 6, \\ 2x_1 + \lambda x_2 + 2x_3 &= 1. \end{aligned}$$

a) Für welche Werte $\lambda \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar?

b) Für welche Werte $\lambda \in \mathbb{R}$ existieren unendlich viele Lösungen?

c) Für welche Werte $\lambda \in \mathbb{R}$ existieren keine Lösungen?

**Aufgabe 8.2** Bestimmen Sie die Dimensionen des Kerns und des Bildes folgender Matrizen und geben Sie für diese entsprechende Basen an.

a) $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 7 & -6 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

**Aufgabe 8.3** a) Bestimmen Sie für das nachstehende Gleichungssystem den Rang der Koeffizientenmatrix $A$ und den Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$.

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 + 17x_3 + 8x_4 &= -20, \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 7x_4 &= -4, \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 5x_4 &= -8, \\ -x_3 + 2x_4 &= 4. \end{aligned}$$

b) Was kann man daraus über die Lösbarkeit des Gleichungssystems schließen?

c) Wieviele Unbekannte können frei gewählt werden?

**Aufgabe 8.4** Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $U \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $C \in \mathbb{R}^{k\times k}$ und $V \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $n, k \in \mathbb{N}$. Die Matrizen $A$, $C$ und $C^{-1} + VA^{-1}U$ seien invertierbar. Beweisen Sie:

$$(A + UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}.$$

*Hinweis:* Zeigen Sie: $(A + UCV)(A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}) = I$.

*Bemerkung:* Diese Identität findet ihre Anwendung in der numerischen Optimierung.

Abgabe: Freitag, 17. Dezember 2010, in der Vorlesung.