Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Michael Pokojovy

14. Januar 2011

Mathematik für Physiker I

10. Übungsblatt

Aufgabe 10.1 a) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ Folgen. Beweisen Sie oder widerlegen Sie:
Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $a \in \mathbb{C}$ konvergiert und $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, d.h. gegen 0 konvergiert, dann ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $a = 0$ und $a \neq 0$.

b) Sei X ein normierter Raum und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge. Beweisen Sie:
Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen ein $x \in X$ genau dann, wenn jede ihrer Teilfolgen $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert.

Aufgabe 10.2 Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}, (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ auf Konvergenz, wobei

a) $a_n := \frac{n^2}{1+n+n^2}$,
b) $b_n := \frac{n^n}{n!}$,
c) $c_n := (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{n}$,
d) $d_n := q d_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $d_0 := 1 + \sqrt{2}$, wobei $q \in (-1, 1)$ beliebig, aber fest vorgegeben ist.

Aufgabe 10.3 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$,
b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 4^{-n}$.

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die nachstehenden Reihen konvergieren, absolut konvergieren oder divergieren:

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k$,
d) $\sum_{k=0}^{\infty} k! x^k$.

Aufgabe 10.4 Bestimmen Sie jeweils Infimum, Supremum, Minimum und Maximum (falls diese existieren) für die folgenden Mengen:

a) $M_1 = \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$,
b) $M_2 = \{x^2 - 6x + 5 \,|\, x \in (-3, 5]\}$.

Vergleichen Sie:

c) $\min_{x\in[0,1]} \left(\max_{y\in[0,1]} (2x^2 + 3y^2) \right)$ und $\max_{y\in[0,1]} \left(\min_{x\in[0,1]} (2x^2 + 3y^2) \right)$,
d) $\min_{x\in\mathbb{R}} \left(\max_{y\in\mathbb{R}} \sin(x - 2y) \right)$ und $\max_{y\in\mathbb{R}} \left(\min_{x\in\mathbb{R}} \sin(x - 2y) \right)$.

Abgabe: Freitag, 21. Januar 2011, in der Vorlesung.