Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Michael Pokojovy

21. Januar 2011

Mathematik für Physiker I

11. Übungsblatt

Aufgabe 11.1 Die Funktion f sei im Intervall (a,b) mit $0 \in (a,b)$ differenzierbar und es gelte $f(0)=0$. Die Funktion g sei in (a,b) definiert durch

$$g(x) := \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ f'(0), & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

a) Die Funktion g ist stetig in (a,b).

b) Existiert $f''(0)$, so ist g differenzierbar in (a,b).

Aufgabe 11.2 Sei

$$f(x) := \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ a, & x = 0, \end{cases}$$

$a \in \mathbb{R}$ fest.

a) Untersuchen Sie die Funktion f auf Stetigkeit, Differenzierbarkeit sowie stetige Differenzierbarkeit.

b) Skizzieren Sie den Graphen von f für $a = 0$.

Aufgabe 11.3 Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x-1}$,

b) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$, wobei $n, m \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Binomische Formel

Berechnen Sie mit Hilfe der Regel von de L'Hôpital die nachstehenden Grenzwerte:

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x-\sin(x)}{x+\sin(x)}$,

d) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right)$,

e) $\lim_{x\to\pi/2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\tan(x)$.

Aufgabe 11.4 a) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

i) $f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax+b$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

ii) $f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{x^2} \cdot \cos(x)$,

iii) $f_3 \colon C^2([0,1],\mathbb{R}) \to C^0([0,1],\mathbb{R})$, $x \mapsto \cos(\cdot)x' + 1$.

b) Zwei Mengen X und Y heißen gleichmächtig oder haben die gleiche Kardinalität, falls es eine Bijektion $\varphi \colon X \to Y$ gibt. Gegeben seien die Mengen

i) $M_1 := \mathbb{N}$,

ii) $M_2 := \mathbb{N}_0$,

iii) $M_3 := \{n \in \mathbb{N} \,|\, \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k\}$,

iv) $M_4 := \{1, \ldots, 2011\}$.

Welche der Mengen haben die gleiche Kardinalität? Welche der Mengen haben unterschiedliche Kardinalität? Beweisen Sie Ihre Aussagen.

Abgabe: Freitag, 28. Januar 2011, in der Vorlesung.