Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Michael Pokojovy

11. Februar 2011

Mathematik für Physiker I

12. Übungsblatt

Aufgabe 12.1 Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Für f gelte $f(0) = 0$ und $f'(x) \leq \lambda f(x)$ für ein festes $\lambda > 0$ und alle $x \in [0,1]$. Beweisen Sie, dass $f(x) \leq 0$ im ganzen Intervall $[0,1]$ gilt. *Hinweis:* Betrachten Sie die Hilfsfunktion $g\colon x \mapsto f(x)e^{-\lambda x}$.

Aufgabe 12.2 a) Sei $f\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \ln(\cos x)$. Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades T_2 von f an der Stelle $x_0 = 0$ und zeigen Sie, dass für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ gilt

$$|f(x) - T_2(x)| \leq \tfrac{2}{3}x^3.$$

Aufgabe 12.3 Entwickeln Sie die angegebenen Funktionen an der Stelle $x = 0$ in Taylorreihen:

a) $f_1\colon x \mapsto \frac{1}{1+x}$,
b) $f_2\colon x \mapsto (x-1)^3 + (x+2)^2 + 5$,
c) $f_3\colon x \mapsto \sqrt{1+x}$.

Beweisen Sie für $x \to 0$:

d) $2\cos x = 2 - x^2 + o(x^3)$,
e) $x\sin(\frac{\pi}{x}) = O(1)$,
f) $e^x - 1 = O(x)$.

Aufgabe 12.4 Bestimmen Sie denjenigen Punkt auf dem Parabelbogel $\{(x, p(x)) \mid x \in [0,3]\}$, $p(x) = 3x - x^2$, der den größten Abstand vom Ursprung hat.

Aufgabe 12.5 a) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Weiter sei $f\colon [a,b] \to [a,b]$ eine glatte Funktion, für welche $|f'(x)| \leq q$ für ein feste $q \in [0,1)$ und alle $x \in (a,b)$ gilt. Zeigen Sie unter Verwendung des Banachschen Fixpunktsatzes, dass f genau einen Fixpunkt in $[a,b]$ besitzt.

b) Gegeben sei die Gleichung $\sin(x) = x^2$. Schreiben Sie ein Programm, um diese Gleichung mit Hilfe des Newton-Verfahrens zu lösen. Wählen Sie $x_0 = \pi$ als Startwert und brechen Sie die Iteration ab, sobald $|f(x_n)| < 10^{-6}$ oder $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-6}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, wobei $f(x) = \sin(x) - x^2$.

Abgabe: Dieses Blatt ist für die selbstständige Bearbeitung gedacht.