Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Michael Pokojovy

19. April 2011

Mathematik für Physiker II

1. Übungsblatt

Aufgabe 1.1 Sei $G \subset \mathbb{R}^m$ offen. Eine Funktion $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ sei in einem Punkt $x_0 \in G$ differenzierbar mit der Ableitung A. Zeigen Sie:

a) Die Ableitung von f an der Stelle x_0 ist eindeutig.

b) Die Funktion f ist partiell differenzierbar in x_0 und es gilt

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x_0) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1.2 Sei $G \subset \mathbb{R}^m$ offen. Sei $f\colon G \to \mathbb{R}$ in G partiell differenzierbar. Beweisen Sie, dass das Gradientenfeld ∇f von f auf den Niveaumengen

$$N_c = \{x \in G \mid f(x) = c\}, \quad c \in \mathbb{R},$$

von f senkrecht steht, d. h., $\nabla f(x_0)$ steht senkrecht auf jeder Kurve in N_c durch x_0.

Aufgabe 1.3 Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen konvex sind:

a) $M_1 = \{x + t(y-x) \mid t \in [0,1]\}$, $x, y \in \mathbb{R}^m$ fest,

b) $M_2 = B_r(x)$, $x \in \mathbb{R}^m$, $r > 0$ fest,

c) $M_3 = [0,1]^m$,

d) $M_4 = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \mid \alpha_k \geq 0, \sum_{k=1}^n \alpha_k = 1 \right\}$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^m$ fest.

Aufgabe 1.4 Berechnen Sie die Ableitungen der nachstehenden Funktionen:

a) $f_1\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle$, $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $b \in \mathbb{R}^m$,

b) $f_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto \begin{pmatrix} \cos(x_2)\sin(x_1x_3) \\ 1 - x_3^2 x_1 \end{pmatrix}$,

c) $f_3\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{m+1}{2}\sum_{k=2}^m (x_k - x_{k-1})^2 + \frac{m+1}{2}(x_1 - a)^2 + \frac{m+1}{2}(b - x_m)^2 - \frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^m x_k f_k$, $a, b \in \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{R}^m$.

Abgabe: Freitag, 29. April 2011, in der Vorlesung.