Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Michael Pokojovy

29. April 2011

Mathematik für Physiker II

2. Übungsblatt

Aufgabe 2.1 Bestimmen Sie die Extrema der nachstehenden Funktionen

a) $f_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$,

b) $f_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 8x_1 + 12x_2 + x_1^2 - 2x_2^2$.

Aufgabe 2.2 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet. Die Funktionen $f, g \colon \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\varphi \colon \Omega \to \mathbb{R}$ seien hinreichend glatt. Beweisen Sie:

a) $\operatorname{rot} \nabla\varphi = 0$,

b) $\operatorname{div} \operatorname{rot} f = 0$,

c) $\operatorname{div}(f \times g) = \langle \operatorname{rot} f, g\rangle - \langle f, \operatorname{rot} g\rangle$,

d) $\operatorname{rot}(\varphi f) = (\nabla\varphi) \times f + \varphi \operatorname{rot} f$.

Aufgabe 2.3 Sei $g \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Die Funktion $f \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = g(|x|) \text{ für } x \in \mathbb{R}^m.$$

a) Zeigen Sie, dass f genau dann im $\mathbb{R}^m$ differenzierbar ist, wenn g in $(0, \infty)$ differenzierbar ist und in 0 die rechtsseitige Ableitung $g'(0+) = 0$ hat.

b) Berechnen Sie $\nabla f(x)$ und $\Delta f(x)$ für $x \neq 0$, falls f zusätzlich zweimal differenzierbar ist.

Aufgabe 2.4 Gegeben Sei die Abbildung $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(x)\cosh(y) \\ \sin(x)\sinh(y)) \end{pmatrix}$$

erklärt ist. Untersuchen Sie f auf (lokale) Umkehrbarkeit.

Abgabe: Freitag, 6. Mai 2011, in der Vorlesung.