Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Michael Pokojovy

6. Mai 2011

Mathematik für Physiker II

3. Übungsblatt

Aufgabe 3.1 Ein Physikstudent ernährt sich von Bier, Currywurst und Pommes. Ein Bier (groß und gut) kostet 2 EUR, eine Portion Currywurst 3 EUR, eine Portion Pommes 1 EUR. Der durch x_1 Einheiten von Bier, x_2 Einheiten von Currywurst und x_3 Einheiten von Pommes erzielte Nutzen wird durch die Nutzenfunktion nach Cobb & Douglas

$$N(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^{1/6} x_2^{1/3} x_3^{1/2}$$

beschrieben. Ermitteln Sie den maximalen Nutzen bei einem gegebenen Budget von 180 EUR.

Aufgabe 3.2 Seien $x_k \in \mathbb{R}^d$, $k = 1, \ldots, n$, mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$. Lösen Sie das Minimierungsproblem: Minimiere $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p \mapsto \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left| x_i - \sum_{j=1}^n p_j x_j \right|^2$ unter der Nebenbedingung $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Aufgabe 3.3 Untersuchen Sie, ob durch die Gleichungen

a) $x - \sin y + u(u+1) = 0,\ -x^3 + 2e^y + u(u-2) = 2,$

b) $x - \sin y + u(u+1) = 0,\ -x^3 + 2e^u + u(u-2) = 2$

in einer Umgebung von $u = 0$ zwei Funktionen $u \mapsto x(u)$, $u \mapsto y(u)$ definiert werden.

Aufgabe 3.4 Seien $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, und sei

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

a) Beweisen Sie: $\det V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

Hinweis: Vollständige Induktion.

b) Seien $\lambda_i \in \mathbb{R}$ und seien $f_i\colon \mathbb{R} \ni t \mapsto e^{\lambda_i t}$, $i = 1, \ldots, n$, Berechnen Sie

$$\det \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \ldots & f_n(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) & \ldots & f_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & f_2^{(n-1)}(t) & \ldots & f_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

für jedes feste $t \in \mathbb{R}$.

Abgabe: Freitag, 13. Mai 2011, in der Vorlesung.