Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Michael Pokojovy

13. Mai 2011

Mathematik für Physiker I

4. Übungsblatt

Aufgabe 4.1 Sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

a) $B = (b_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b_{ij} = \begin{cases} 1, & i+j = n+1, \\ 0, & i+j \neq n+1. \end{cases}$

b) $\begin{pmatrix} -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} - x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$,

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *Hinweis:* Gauß & Jordan.

d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4.2 Es seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ beliebige quadratische Matrizen über einem Körper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Wir definieren $p\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \det(A + xB)$. Zeigen Sie:

a) p ist ein Polynom vom Grad $\deg(p) \leq n$.

b) $\deg(p) = n$ gilt genau dann, wenn B invertierbar ist.

Aufgabe 4.3 Lösen Sie mit Hilfe der Cramerschen Regel die folgenden Gleichungssysteme:

a) $$\begin{aligned} 3x + 2y + 4z &= 1, \\ 2x - y + z &= 0, \\ x + 2y + 3z &= 1, \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 0, \\ 2x - 3y + 4z &= 1, \\ -3x + 4y - 4z &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 4.4 Die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ sei für $x \in [-1,1]$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{n+2}, & \text{für } x \in \left[-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right) \cup \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f eine Regelfunktion ist, indem Sie eine gegen f konvergierende Folge von Treppenfunktionen angeben.

b) Berechnen Sie $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.
Hinweis: Partialbruchzerlegung.

Abgabe: Freitag, 20. Mai 2011, in der Vorlesung.